Géométrie et équations cartésiennes

Cercles et droites

(1)

1 Équations d'un ensemble de points

2 Equations dans le plan

3 Cercles

Plan

1. Équations d'un ensemble de points
2. Equations dans le plan
3. Cercles

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de points

- du plan $\mathcal{P}$: un point, une droite, la réunion de 3 droites, un cercle, une ellipse, le plan en entier, ou même l'ensemble vide...
- de l'espace $\mathcal{E}$: un point, un plan, une droite, une sphère, un cône,....

On cherche à deviner si un point M est dans $\mathcal{A}$ juste par observation de ses coordonnées :

- équations cartésiennes
- équations paramètriques (ou paramètrées).

Définition

Dans le plan
l'équation $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{A}$:

$$M(x, y) \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x, y) = 0$$

Dans l'espace
l'équation $F(x, y, z) = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{A}$:

$$M(x, y, z) \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x, y, z) = 0$$

Exemple : La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $2x + y - 1 = 0$:

$$M(x, y) \in D \iff 2x + y - 1 = 0.$$

Le point $A(2, -3)$ vérifie $2 \times 2 - 3 - 1 = 0$ donc $A \in D$.
Le point $B(1, 5)$ donne $2 \times 1 + 5 - 1 = 6 \neq 0$, donc $B \notin D$.

Exercice

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble du plan défini par l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 6 = 0$$

Les points $A(1, 2)$ et $B(2, -4)$ appartiennent-ils à $\mathcal{A}$?

Notions. Un point est dans un ensemble si les coordonnées du points vérifient l'équation cartésienne.

Technique : Pour établir l'équation cartésienne d'un ensemble $\mathcal{A}$.

1. Soit M un point (de coordonnées (x, y) ou (x, y, z)).
2. $M \in \mathcal{A}$ si M vérifie (*insérer les propriétés géométriques de M*)
3. traduire les propriétés géométrique en calcul avec les coordonnées (norme, produit scalaire, déterminant, proportionalité, produit vectoriel...)
4. Obtenir une équation

Remarque : Pas d'unicité de l'équation !

Équations paramétriques de $\mathcal{A}$

Définition

Une équation parametrique de $\mathcal{A}$: .

$$M(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y &= g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{cases}$$

dans le plan, avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ réels (paramètres) et f, g des fonctions.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y &= g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ z &= h(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{cases}$$

dans l'espace, avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ réels (paramètres) et f, g, h des fonctions

Exemple : (Avec un paramètre)

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

représente une courbe paramétrée dans le plan.

Exercice

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble du plan défini par le système paramétrique

$$\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Les points $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D\left(\sqrt{3}, 1\right)$ appartiennent-ils à $\mathcal{F}$?

Notions. Un point est dans un ensemble si on peut trouver une valeur du paramètre qui donne les coordonnées du point.

Plan

1 Équations d'un ensemble de points

2 Equations dans le plan

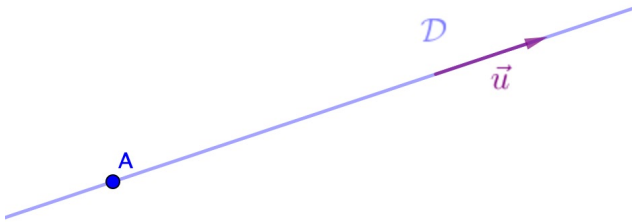
3 Cercles

- $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan
- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ la base des vecteurs.
- (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère

Objectif $\rightarrow$ équations de droites et de cercles.

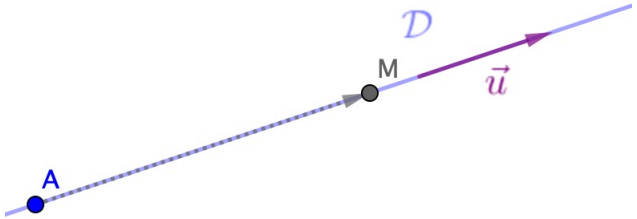
Droites du plan

$\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.



Technique : Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$



deux approches : proportionalité et déterminant.

Proportionalité

- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$, tel que

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}} \iff \begin{pmatrix} x - \heartsuit \\ y - \heartsuit \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = \heartsuit + t\heartsuit \\ y = \heartsuit + t\heartsuit \end{cases}$$

On obtient une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

A l'inverse, si la solution d'un système s'écrit avec un paramètre :

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

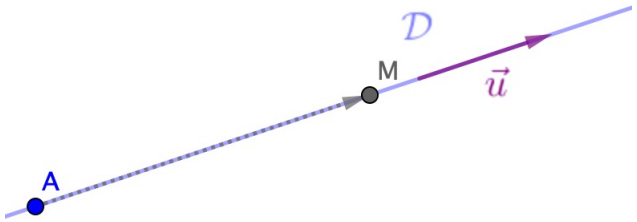
On pose les points $M(x, y)$, $A(a, b)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$$

Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Les solutions forment une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Déterminant

$\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.



$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\iff \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots \iff \quad \boxed{ax + by + c = 0}$$

avec a, b, c des réels. C'est l'équation cartésienne de la droite.

le vecteur $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur orthogonal (ou normal) à la droite.

A l'inverse, une équation

$$ax + by + c = 0$$

représente une droite dans le plan.

- Vecteur normal $\vec{n}(a, b)$
- $\rightarrow$ vecteur directeur $\vec{u}(b, -a)$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
- Il faut trouver une valeur (x, y) qui marche pour trouver un point A de la droite

Exercice

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(2,3)$ et $B(-4,7)$.
2. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Notions.

- $M(x,y)$ un point est sur la droite passant par A et B signifie ....
- Deux vecteurs sont colinéaires si leur déterminant est nul.
- On trouve le vecteur normal à une droite en prenant le coefficient devant x et le coefficient devant y dans l'équation de la droite.

Exercice

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 5y + 8 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Notions.

- On peut déterminer des points de la droite en remplaçant une des coordonnée par un nombre et en déduisant l'autre à partir de l'équation.
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il sont proportionnels $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- On peut aussi utiliser un système.

Exercice

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(2,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,2)$.

Notions.

- un vecteur normal à une droite est un vecteur orthogonal à cette droite.
- Soit $M(x,y)$ un point. M est sur la droite signifie ....
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Parallélisme et perpendicularité

Définition

$\mathcal{D}$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
$\mathcal{D}'$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$\mathcal{D}$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}'$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$

Technique : on étudie les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$:

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u'}) = 0 \rightarrow$ vecteurs colinéaires $\rightarrow$ droites parallèles
- Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u'}) \neq 0 \rightarrow$ droites sécantes
  - (bonus) Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = 0$ (en repère orthonormal) $\rightarrow$ droites orthogonales.

Propriété.

Les droites parallèles à $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ sont les droites dont une équation cartésienne est

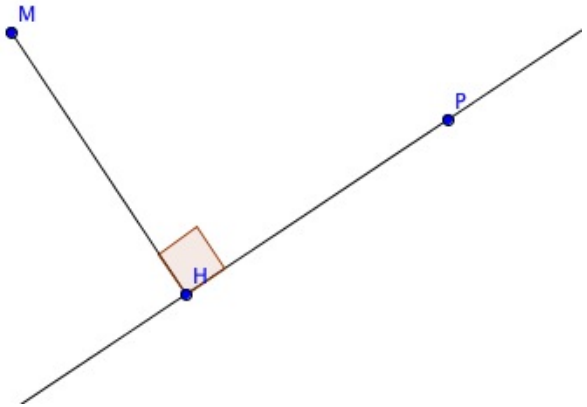
$$ax + by + \gamma = 0, \qquad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Définition

$\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point.
On fait le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$.

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = HM \text{ est la } \boxed{\text{distance de } M \text{ à } \mathcal{D}}$$

.



Propriété.

Pour tout point P de $\mathcal{D}$,

$$MP \geqslant \mathrm{d}(M, \mathcal{D})$$

(égalité si $P = H$)

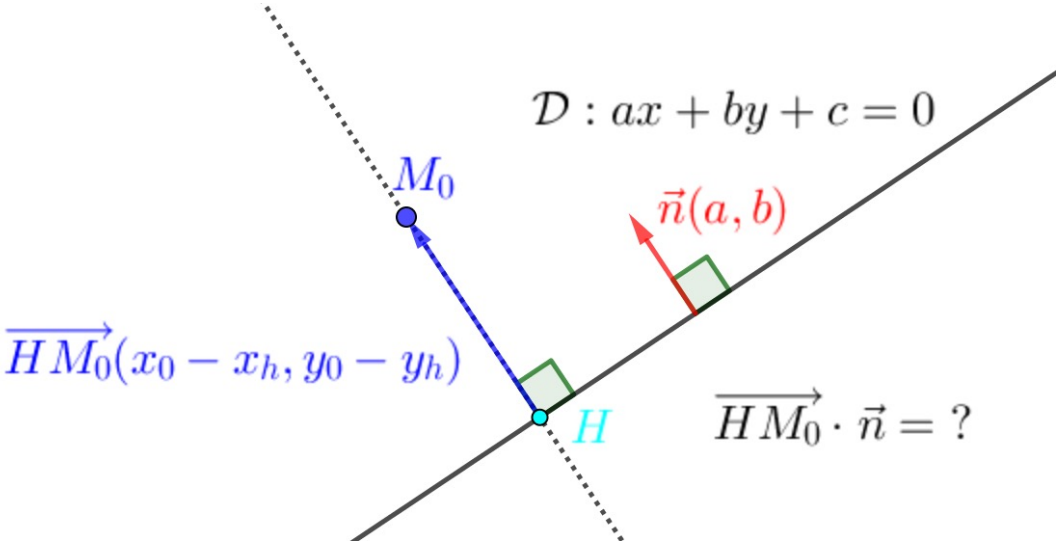
La distance de M à $\mathcal{D}$ est la plus petite distance entre M et les points de $\mathcal{D}$.

Propriété.

En repère orthonormal
La distance de $M_0(x_0, y_0)$ à $\mathcal{D}(ax + by + c = 0)$ est :

$$\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration.



Exercice

Calculer la distance du point $A(-2,1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 4y + 4 = 0$.

Notion. La distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Intersection de deux droites et systèmes

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0, \qquad \mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$$

$M(x, y)$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Trois cas (c.f. systèmes).

- une seule solution (x_A, y_A) : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $A(x_A, y_A)$.
- pas de solution : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (aucun point commun).
- une infinité de solutions : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

Et il en reste quoi ?

1. Pour trouver l'équation cartésienne d'une figure dans le plan, quelle est la première chose à écrire ?
2. Dans le plan, l'équation $2x + 7y - 6 = 0$ représente quoi ? Et le vecteur $(2, 7)$ est le vecteur .... (?)....
3. Quel est la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'une droite ?

Réponses

1. Pour trouver l'équation cartésienne d'une figure dans le plan, on pose $M(x, y)$ un point de la figure.
2. l'équation $2x + 7y - 6 = 0$ représente une droite. Et le vecteur $(2, 7)$ est le vecteur normal à la droite.
3. la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'une droite est l' alignement (ou la colinéarité).

Plan

1. Équations d'un ensemble de points
2. Equations dans le plan
3. Cercles

Etablir l'équation d'un cercle en repère **orthonormal**

$\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r = tous les points qui sont à distance r de A

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad AM = r \quad \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| \quad = r$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AM}} + y^2_{\overrightarrow{AM}}} = r \quad \Leftrightarrow \quad x^2_{\overrightarrow{AM}} + y^2_{\overrightarrow{AM}} = r^2$$

Après développement et mise en ordre :

$$\boxed{x^2 + y^2 + \clubsuit x + \spadesuit y + \heartsuit = 0}$$

est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice

Donner l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon 4.

Notions.

- Soit $M(x, y)$ un point du plan. M appartient au cercle si la distance entre le centre du cercle et M est égale au rayon
- la distance entre deux points A et B est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- une équation de cercle commence par $x^2 + y^2$ et termine par $= 0$

A l'inverse, une équation cartésienne $x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$, représente un cercle ou l'ensemble vide.

Forme canonique d'un trinôme (Rappel) :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Exemples :

Trouver un cercle à partir d'une équation.

On veut identifier $\mathcal{C}$ un ensemble de points du plan d'équation

$$x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - cx} + \underbrace{y^2 - dy} + e = 0$$

Technique de la forme canonique (pour x et pour y) puis on regroupe toutes les constantes à droite :

$$(x + \spadesuit)^2 + (y + \heartsuit)^2 = C$$

$$(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2=C$$

- si $C<0$: $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide $\emptyset$.
- si $C\geqslant 0$:

$$\sqrt{(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2}=\sqrt{C}$$

On pose le point $\Omega(-\spadesuit,-\heartsuit)$ et on reconnait alors

$$\Omega M=\sqrt{(x-(-\spadesuit))^2+(y-(-\heartsuit))^2}$$

$$\Omega M=\sqrt{C}$$

Donc $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{C}$.

Exercice

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Reconnaître la partie du plan représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = k$$

pour $k = 3$ puis pour $k = -7$.

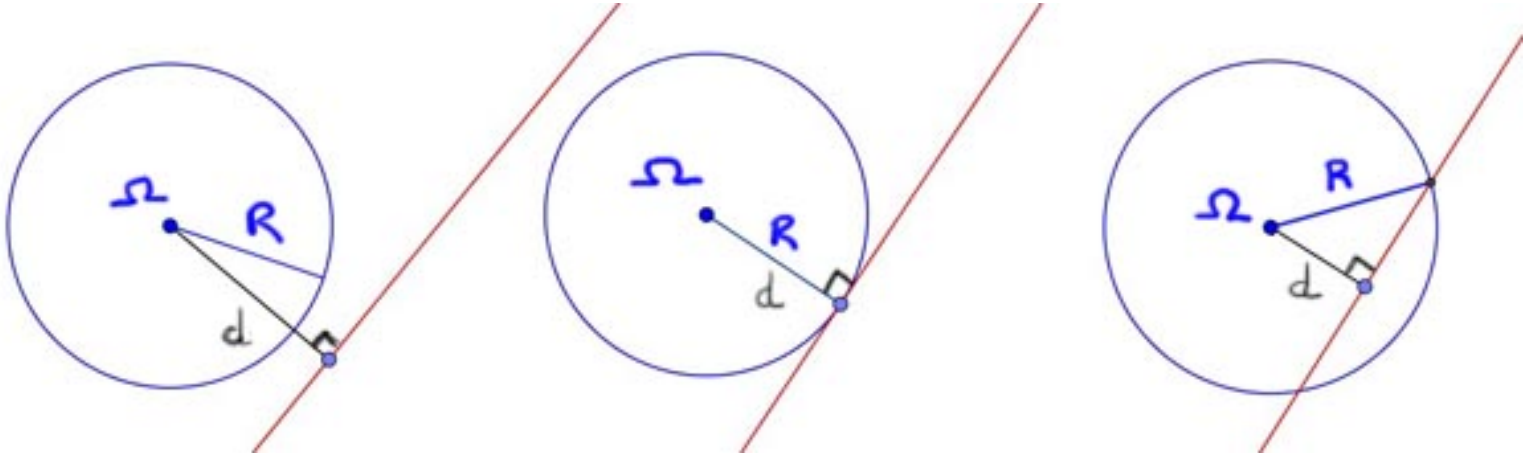
Notions.

- La forme canonique de $x^2 + ax$ se trouve en développant $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$. Idem pour y
- On doit arriver à une expression $(\cdots)^2 + (\cdots)^2 = \textit{constante}$.
- la distance entre deux points A et B est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Un cercle est l'ensemble des points situé à distance fixe r du centre.

Propriété. Intersection d'une droite et d'un cercle

L'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est

- l'ensemble vide si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$
- un point unique T si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en T
- deux points distincts si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$



Pour calculer les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$

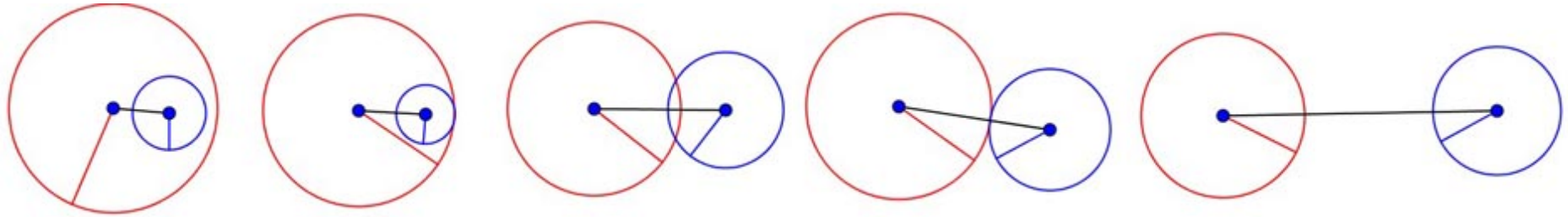
1. Méthode calcul :

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{équation de } \mathcal{D} & \rightarrow \text{isoler } x = ... \\ \text{équation de } \mathcal{C} & \qquad\qquad\qquad \text{reporter dans } \mathcal{C} \rightarrow y \end{cases}$$

2. Méthode géométrique : le rayon est perpendiculaire à la droite en cas de tangence.

Intersection de deux cercles



Propriété.

Le cercle de centre Ω, rayon R et le cercle de centre ω, rayon r ont une intersection non vide ssi

$$|R - r| \leqslant \Omega\omega \leqslant R + r.$$

Technique : Calculer l'intersection des cercles

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0, \quad \mathcal{C}' : x^2 + y^2 - Cx - Dy + E = 0$$

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0 \\ x^2 + y^2 - Cx - Dy + E = 0 \end{cases} \quad (\boxed{L_2 \leftarrow L_2 - L_1})$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0 \\ \heartsuit x + \spadesuit y + \diamondsuit = 0. \end{cases}$$

- Si $\heartsuit = \spadesuit = 0$, les deux cercles sont concentriques (même centre). Ils sont confondus s'ils ont le même rayon et ont une intersection vide dans le cas contraire.
- Sinon, les deux cercles ne sont pas concentriques. L_2 est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ (axe radical des deux cercles). On utilise L_2 pour isoler x ou y qu'on reporte dans L_1 pour le déterminer.

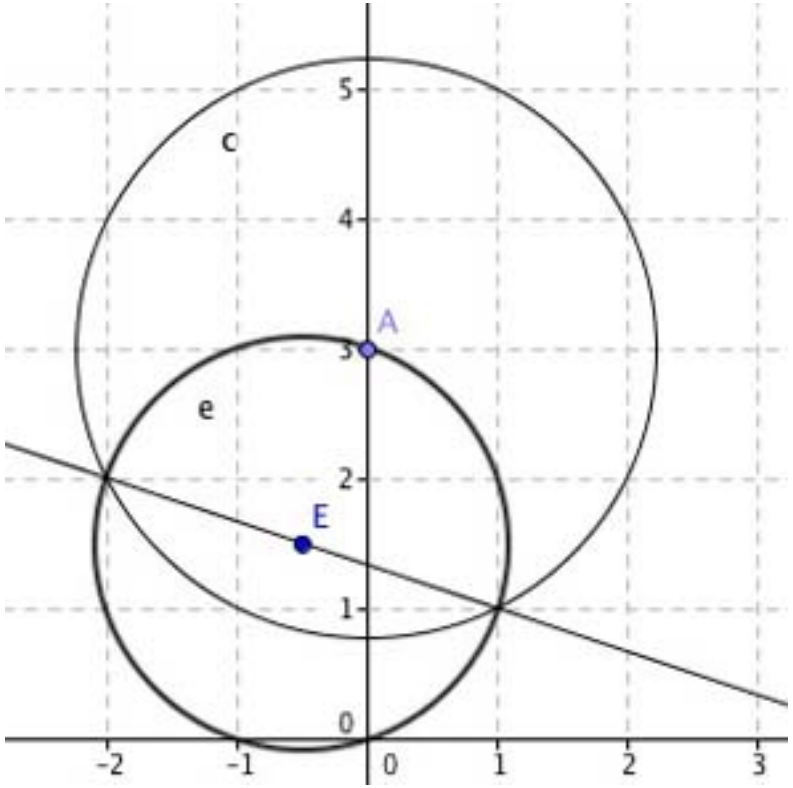
Exercice

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer les éventuels points d'intersection de

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0 \text{ et } \mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$$

Notions

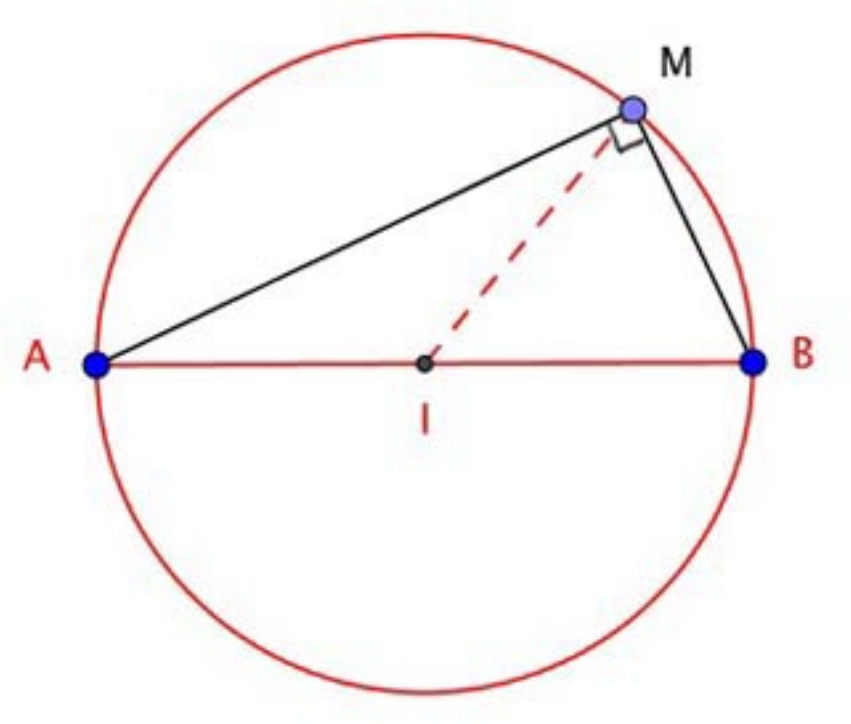
- Trouver l'intersection de plusieurs figures définies par des équations revient à résoudre le système des équations.
- En faisant $L_2 - L_1$, on obtient une équation du premier degré permettant d'isoler x en fonction de y (ou inversement)
- Ensuite on reporte dans l'autre équation pour trouver les coordonnées des solutions du système.


c
e
A
E
5
4
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
3

Une caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$

Propriété.

Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Démonstration. Soit I le milieu du segment $[AB]$

$$0 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

On a $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \|\overrightarrow{IA}\| . \|\overrightarrow{IB}\| \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right) \times (-1)$$

Donc

$$0 = MI^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \iff MI = \frac{AB}{2}$$

Donc le point M est sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est à dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $A(1,2)$ et $B(-3,4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ de la forme $x^2+y^2-Cx-Dy+E=0$, sans calculer ni son centre, ni son rayon.

Notion. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Et il en reste quoi ?

1. Quel est la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'un cercle ?
2. A quoi ressemble l'équation cartésienne d'un cercle dans le plan ?
3. Pour déterminer l'intersection de deux figures géométriques, quel outil de calcul utiliser ?

Réponses

1. la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'un cercle est la distance fixe par rapport au centre.
2. l'équation cartésienne d'un cercle dans le plan est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
3. Pour déterminer l'intersection de deux figures géométriques, on fait un système avec les équations des deux figures.