

Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

1 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

2 Opérateurs et champs de vecteurs

Plan

- 1 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p
- 2 Opérateurs et champs de vecteurs

Définition

$A \subset \mathbb{R}^n$. Une application/fonction de A dans \mathbb{R}^p est

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$$
$$\vec{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

f_1, f_2, \dots, f_p sont les fonctions coordonnées de f .

Si $p \neq 1$, f est un champ de vecteurs

Si $p = 1$, f est un champ de scalaires

Exemples :

- Si $n = 1$ et $p = 1$: fonctions réelles.
- Si $n = 1$ et $p = 2$: courbes paramétriques.
- Si $n = 2$ et $p = 1$: fonctions réelles de deux variables.

Limite et continuité

Définition

f admet ℓ pour **limite** en a (point ou frontière de A) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \ell_2 \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_p(x) = \ell_p \end{cases}$$

Définition

Si $a \in A$, f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si f est continue sur A si f est continue en tout point de A

L'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^p)$ des fonctions continues A est un espace vectoriel.

Propriété.

f est continue sur $A \Leftrightarrow$
ses applications coordonnées sont continues sur A .

Exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x^2 + xy, \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

est continue sur \mathbb{R}^2 car ses deux applications coordonnées sont continues.

Dérivées partielles

Définition

f a une **dérivée partielle en $a \in A$** suivant la j -ième variable
 \Leftrightarrow
les fonctions coordonnées de f ont toutes une dérivée partielle par rapport à la j -ième variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1(A)$ \Leftrightarrow ses fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1(A)$.

Définition

La matrice jacobienne de f en a est

$$J(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Lorsque $n = p$, la matrice jacobienne de f en a est une matrice carrée et son déterminant est le jacobien de f en a .

Exemple : Calculer la matrice jacobienne au point $(1, 2, 0)$ de la fonction

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2. \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 y^3 z^4 \\ \frac{xy}{z^2 + x^2 + 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice

Calculer la matrice jacobienne de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2. \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Notion.

$$J(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple : La fonction permettant de passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\rightarrow \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au point (ρ, θ) , la matrice jacobienne est

$$J(f)(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(J(f)(\rho, \theta)) = \rho$$

fonction composée et fonction réciproque

Théorème.

f et g fonctions de classe \mathcal{C}^1 (sur ensembles de définition adéquats)

La fonction $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$J(g \circ f)(a) = J(g)(f(a)) \times J(f)(a)$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$(r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

$$J(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(f)(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

La composée $g \circ f$ est la fonction g exprimée en coordonnées polaires :

$$g \circ f(r, \theta) = \begin{pmatrix} r(\cos(\theta) + \sin \theta) \\ r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sa matrice jacobienne est

$$\begin{aligned} J(g \circ f)(r, \theta) &= J(g)(r \cos \theta, r \sin \theta) J(f)(r, \theta) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2r \cos \theta & -2r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta & r(\cos \theta - \sin \theta) \\ 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -4r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 2r \sin \theta \cos \theta & r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et **bijective** sur A , alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur $f(A)$.

Pour $a \in A$ et $b = f(a)$,

$$J(f^{-1})(b) = \left(J(f)(a) \right)^{-1}.$$

la matrice jacobienne de f^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne de f .

Exemple :

$$A =]0, +\infty[\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2, \quad f : A \rightarrow A$$
$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix},$$

$$J(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Montrons que f est une bijection. On prouve que l'équation

$$f(x, y) = (a, b)$$

a une unique solution (x, y) pour tout $(a, b) \in A$.

Soit $(a, b) \in A (> 0)$, on cherche $(x, y) \in A(> 0)$ tel que $f(x, y) = (a, b)$:

$$\begin{cases} a = x^2 \\ b = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ y = \frac{b}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

f est bien une bijection de A dans A . Sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad U &\rightarrow U \\ (a, b) &\mapsto (\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}}) \end{aligned}$$

On calcule sa matrice jacobienne en inversant la matrice $J(f)(x, y)$

$$(J(f)(x, y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ \frac{-y}{2x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

puis en remplaçant $x = \sqrt{a}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a}}$

$$J(f^{-1})(a, b) = \left(J(f)(\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}}) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{a}} & 0 \\ \frac{-b}{2a\sqrt{a}} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

Exercice

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2. \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Montrer que f est une bijection, calculer sa bijection réciproque et la matrice jacobienne de la réciproque (par deux méthodes différentes).

Notions.

- ① f est une bijection si l'équation $f(x, y) = (a, b)$ a une unique solution (x, y) pour TOUT $(a, b) \in A$. Alors $(x, y) = f^{-1}(a, b)$

②

$$J(f^{-1})(a, b) = \left(J(f)(x, y) \right)^{-1}.$$

Plan

- 1 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p
- 2 Opérateurs et champs de vecteurs

Dans cette partie, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition

L'opérateur formel nabla ∇ est

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Définition

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de scalaires.

Le **gradient** de f est

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f$$

Le **Laplacien** de f est

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

Définition

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La **divergence** de F est

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot F$$

Le **rotationnel** de F est

$$\operatorname{Rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \wedge F$$

Définition

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le Laplacien de F est

$$\Delta F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \nabla^2 F$$

Propriété.

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^2

- ① La divergence d'un rotationnel est nulle : $\operatorname{div} (\operatorname{Rot} F) = 0$
- ② $\operatorname{Rot} (\operatorname{Rot} F) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} F) - \Delta F$

Propriété.

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^2 .

- ① Le rotationnel d'un gradient est le vecteur nul :
 $\operatorname{Rot} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \vec{0}$
- ② Le laplacien est la divergence du gradient :
 $\Delta f = \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$

Remarque : à conditions que certaines hypothèses soient vérifiées

Propriété.

si $\text{Rot } F = \vec{0}$, alors il existe un champ de scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$F = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Si $\text{div } (F) = 0$ alors il existe un champ de vecteur $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$F = \text{Rot } f$$

Remarque : Sous certaines conditions.

Exemple :

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\text{Rot } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x} \\ \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc il existe un champ de scalaire f tel que $F = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy \end{cases}$$

$$L_1 \rightarrow f(x, y, z,) = xyz + "c" = xyz + c(y, z)$$

report dans L_2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz \Rightarrow xz + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = xz \Rightarrow \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = 0$$

$$c(y, z) = c(z) \rightarrow f(x, y, z,) = xyz + c(z)$$

report dans L_3

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \Rightarrow xy + \frac{\partial c(z)}{\partial z} = xy \Rightarrow \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0$$

$$c(z) = c \rightarrow f(x, y, z) = xyz + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exercice

On considère dans \mathbb{R}^3 le vecteur \vec{v} de coordonnées

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy + z^2 \\ 2yz + x^2 \\ 2xz + y^2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v})$. En déduire qu'il existe une fonction scalaire $f(x, y, z)$ telle que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{v}$. Déterminer f .