

## 12. Polynômes et fractions rationnelles

### 1. Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

#### 1.1. Définitions et opérations

La plupart des résultats que l'on donnera dans ce chapitre ne changent pas selon qu'on travaille dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Pour alléger les énoncés des résultats, on notera  $\mathbb{K}$  pour  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , lorsqu'il n'y a pas besoin de faire une distinction.

##### Définition 1.

Un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est une fonction  $P$  de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  de la forme

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où  $n$  est un entier naturel et les nombres  $a_0, \dots, a_n$  sont des constantes appartenant à  $\mathbb{K}$ , appelées coefficients de  $P$ .

On appelle monôme tout polynôme de la forme  $x \mapsto a_n x^n$ .

**Notation.** Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $X^k$  le polynôme  $X^k : x \mapsto x^k$ . Ainsi, le polynôme  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  peut s'écrire  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . On notera ce polynôme  $P$  ou  $P(X)$  indifféremment. En particulier,  $X$  est une notation pour la fonction  $x \mapsto x$ .  $X$  n'est donc pas une variable!!

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

## Exemples.

1. Le polynôme nul est noté 0.
2. Le polynôme  $P : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$  est noté  $3X^2 + 2X - 1$ .

### Définition 2.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathbb{K}[X]$ . On peut additionner, soustraire et multiplier des polynômes. On peut aussi les multiplier par une constante. On peut dériver et primitiver les polynômes.

**Exemple.** L'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  contient par exemple les polynômes 0, 4,  $\pi X^{12} - 6X$ . Ces trois mêmes polynômes sont aussi des éléments de  $\mathbb{C}[X]$ . Le polynôme  $iX^3 + 3$  appartient à  $\mathbb{C}[X]$  mais pas à  $\mathbb{R}[X]$ .

### Propriété 3.

Si un polynôme  $P$  vérifie :  $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = 0$ , alors tous les coefficients de  $P$  sont nuls.

En particulier, si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x)$  (c'est-à-dire  $P = Q$ ), alors  $P$  et  $Q$  ont les mêmes coefficients.

**Démonstration.** (cas d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ ) Soit  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  un polynôme à

coefficients dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un au moins des coefficients de  $P$  est non nul. Alors l'ensemble d'indices  $\{k \in \{0, \dots, n\} \mid a_k \neq 0\}$  n'est pas vide. Notons  $M$  son

plus grand élément. On peut donc écrire :  $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=0}^M a_k x^k$  et  $a_M \neq 0$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

- Si  $M = 0$ , alors on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_0$  et  $a_0 \neq 0$ . C'est absurde.
- Si  $M > 0$ , alors on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_M x^M = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_M x^M = -\infty$  suivant le signe de  $a_M$  et la parité de  $M$ . Ces deux cas sont impossibles puisque la fonction  $P$  est nulle.

En conclusion, tous les coefficients de  $P$  sont nuls.

**Démonstration.** Soit  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^m b_k x^k$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer que  $n \leq m$ . Si  $n < m$ , on pose  $a_{n+1} = \dots = a_m = 0$  de sorte que l'on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ .

Supposons que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = Q(x)$ . On a alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, (P - Q)(x) = 0$  et  $(P - Q)(x) = \sum_{k=0}^m (a_k - b_k) x^k$ . D'après le résultat précédent,  $a_k = b_k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, m\}$ . Donc  $P$  et  $Q$  ont les mêmes coefficients.

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

## 1.2. Degré d'un polynôme

### Définition 4.

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme **non nul** à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Le

**degré de  $P$**  est le plus grand indice  $k$  tel que  $a_k$  soit non nul. On le note  $\deg(P)$ .

- Le degré du polynôme nul est  **$-\infty$**  par convention.
- Si  $d = \deg(P)$ , alors le coefficient  $a_d$  est appelé le **coefficient dominant** de  $P$ .
- On dit qu'un polynôme non nul est **unitaire** lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  **$\mathbb{K}_n[X]$**  l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à  $n$ .

### Exemples.

1. Le polynôme  $-4X^5 + 3X + 1$  est de degré 5. Son coefficient dominant est  $-4$ .
2. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls.
3. Les trinômes du second degré sont les polynômes de la forme  $aX^2 + bX + c$ , où  $a$  est non nul.
4. Le polynôme  $X^3 + 2X + 5$  est unitaire.
5. On a  $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ . L'ensemble  $\mathbb{R}_2[X]$  est formé des trinômes du second degré, des polynômes de degré 1 et des polynômes constants (polynôme nul compris).

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Propriété.

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes. Soit  $\lambda$  une constante appartenant à  $\mathbb{K}$ .

- On a  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ . Plus précisément :
  - Si  $\deg(P) < \deg(Q)$ , alors  $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ .
  - Si  $P$  et  $Q$  ont même degré  $d$  et si la somme de leurs coefficients dominants est non nulle, alors  $P + Q$  est aussi de degré  $d$ .
- Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ .
- On a  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Remarque :

- Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de degré  $n$ , le degré du polynôme  $P + Q$  peut être strictement inférieur à  $n$ . Par exemple, les polynômes  $P = 3X^5 + 2$  et  $Q = -3X^5 + 4X$  sont de degré 5 mais leur somme  $P + Q = 4X + 2$  est de degré 1.
- La relation sur le degré d'un produit de deux polynômes justifie la définition  $\deg(0) = -\infty$ . En effet, il faut que pour tout polynôme  $P$ , on ait  $\deg(0.P) = \deg(0) = \deg(0) + \deg(P)$ .

### Propriété 6.

Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On a  $\deg(P') =$

$$\begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } P \text{ n'est pas constant,} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant.} \end{cases}$$

Plus généralement, si  $P$  est non nul et de degré  $n$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le polynôme  $P^{(k)}$  est de degré  $n - k$ . Dans ce cas, pour tout  $k \geq n + 1$ , le polynôme  $P^{(k)}$  est le polynôme nul.

**Exemple.** Si l'on dérive plus de trois fois un polynôme de degré 3 ( $P(X) = aX^3 +$

$bX^2 + cX + d$ ), on obtient le polynôme nul ( $P^{(4)}(X) = P^{(5)}(X) = \dots = 0$ ).

### 1.3. Arithmétique des polynômes

#### Théorème 7.

(division euclidienne) Pour tous polynômes  $A$  et  $B$ ,  
le polynôme  $B$  étant non nul, il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que

$$A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

$Q$  est le quotient et  $R$  le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Remarque :** Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , c'est trouver les polynômes  $Q$  et  $R$ .

**Exemple.** Effectuons la division de  $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$  par  $X^2 - X + 1$ .

#### Exercice 1

Faire la division euclidienne de  $A = 6X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 5$  par  $B = 2X^2 - 2X + 3$ .

#### Définition 8.

On dit qu'un polynôme  $B$  divise un polynôme  $A$ , et l'on note  $B \mid A$ , si et seulement si il existe un polynôme  $Q$  tel que  $A = Q \cdot B$ .

on dit aussi que  $A$  est divisible par  $B$ , que  $A$  est un multiple de  $B$  et que  $B$  est un diviseur de  $A$ .

**Exemple.** Le polynôme  $X^2 - 1$  est un multiple de  $X + 1$  car on peut écrire  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

**Propriété 9.**

$B$  divise  $A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

## 2. Racines d'un polynôme

### 2.1. Définitions et caractérisations

**Définition 10.**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On dit que le nombre  $\alpha$  est une **racine** de  $P$  si et seulement si on a :  $P(\alpha) = 0$ .

**Remarque :** Le polynôme nul admet tout nombre pour racine.

**Exercice 2**

Déterminer les racines  $r_1$  et  $r_2$  du polynôme  $P = 2X^2 + 2X - 12$ .

Sans calcul,  $P(r_1) = \dots$  et  $P(r_2) = \dots$  ?

**Propriété 11.**

Le nombre  $\alpha \in \mathbb{K}$  est une racine du polynôme  $P$  si et seulement si  $(X - \alpha)$  divise  $P$ .

**Démonstration.**  $\Leftarrow$  Si  $(X - \alpha)$  divise  $P$ , alors il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - \alpha)Q$ . On pose  $x = \alpha$  et on obtient  $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$ . Donc  $\alpha$  est une racine de  $P$ .

$\Rightarrow$  Si  $\alpha$  est une racine de  $P$ , on fait la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \alpha)$ . Il existe donc  $Q, R$  des polynômes tels que  $P = (X - \alpha)Q + R$ , avec  $\deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$ .

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

Donc  $R$  est un polynôme constant, c'est à dire  $R = c$  qu'on reporte dans la relation :  $P = (X - \alpha)Q + c$ . On pose  $x = \alpha$  et on obtient  $P(\alpha) = c$ . Or  $\alpha$  est une racine de  $P$  donc  $P(\alpha) = 0 = c$ , donc  $R = 0$ . Donc  $(X - \alpha)$  divise  $P$ .

**Exemple.** 5 est une racine du polynôme  $P = X^3 - 5X^2$  car  $P = (X - 5)X^2$ .

### Exercice 3

Les racines du polynômes  $P = 2X^2 + 2X - 12$  sont  $r_1 = 2$  et  $r_2 = -3$ . Donner deux polynômes de degré 1 divisant  $P$ .

### Définition 12.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul. Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On suppose que  $\alpha$  est une racine de  $P$ . L'ordre de multiplicité de la racine  $\alpha$  de  $P$  est l'exposant  $m$  maximal tel que  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$ .

Autrement dit, le nombre  $\alpha$  est une racine de multiplicité  $m$  de  $P$  si et seulement si le polynôme  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$  et le polynôme  $(X - \alpha)^{m+1}$  ne divise pas  $P$ .

Les racines de multiplicités 1, 2 et 3 sont respectivement appelées racine simple, double et triple.

**Exemple.** 5 est une racine simple du polynôme  $P = X^3 - 5X^2$  car  $P = (X - 5)X^2$ . On a  $(X - 5)$  qui divise  $P$ , mais si on divise  $P$  par  $(X - 5)^2 = X^2 - 10X + 25$ , on obtient  $P = (X^2 - 10X + 25)(X - 5) + (25X - 125)$ . Donc ce n'est pas divisible et 5 n'est pas racine double.

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)



### Propriété 13.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul. Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  une racine de  $P$ . Soit  $m \geq 1$  un nombre entier.

Le nombre  $\alpha$  est une **racine de multiplicité**  $m$  de  $P$  si et seulement si il existe un polynôme  $Q$  vérifiant

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Le nombre  $\alpha$  est une **racine de multiplicité**  $m$  de  $P$  si et seulement si on a :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

**Exemple.** On reprend  $P = X^3 - 5X^2$ . On a  $P(0) = 0$  donc 0 est racine de  $P$ . On dérive :  $P' = 3X^2 - 10X$  et on a  $P'(0) = 0$ . On dérive encore  $P'' = 6X - 10$  et  $P''(0) = -10 \neq 0$ . Donc 0 est une racine double de  $P$ .

### Exercice 4

Soit  $P = X^3 - 3X + 2$ . Calculer  $P(1)$ ,  $P'(1)$  et  $P''(1)$ . Que peut-on en déduire sur le nombre 1 ? Et sur un polynôme diviseur de  $P$  ?

### Propriété.

Soit  $P$  un polynôme à coefficients **réels**. Si  $\alpha$  est une racine complexe de  $P$  de multiplicité  $m$ , alors son conjugué  $\bar{\alpha}$  est aussi une racine de  $P$  de même ordre de multiplicité  $m$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

## 2.2. Factorisation d'un polynôme

### Propriété 15.

1. Soit  $P$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ .
  - (a) Si  $P$  est non nul, alors la somme des ordres de multiplicité de toutes les racines de  $P$  est inférieure ou égale à  $n$ .
  - (b) Si  $P$  est non nul, alors le polynôme  $P$  possède au plus  $n$  racines distinctes.
  - (c) Si le polynôme  $P$  possède au moins  $n + 1$  racines, alors  $P$  est le polynôme nul.
2. Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.
3. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à  $n$ . Si  $P$  et  $Q$  coïncident en au moins  $(n + 1)$  points (ou un nombre infini de points), alors  $P$  et  $Q$  sont égaux.

**Remarque :** Coïncider en au moins  $(n + 1)$  points signifie qu'il y a au moins  $(n + 1)$  nombres  $x_1, x_2, \dots$  distincts tels que  $P(x_1) = Q(x_1), P(x_2) = Q(x_2), \dots$  Graphiquement, les courbes de  $P$  et  $Q$  se croisent aux moins  $n + 1$  fois.

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Propriété 16.

Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $n$  et de coefficient dominant  $a_n$ . Soit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  les racines distinctes de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, m_2, \dots, m_r$ . Si on a

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$

alors  $P$  se factorise ainsi :

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

Un tel polynôme, factorisable sous forme d'un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est dit **scindé sur  $\mathbb{K}$** .

**Exemples.**  $P = X^3 - 5X^2$  a pour racine 5 (multiplicité 1) et 0 (multiplicité 2). La somme des multiplicités est  $1 + 2 = 3 = \deg(P)$ . Le polynôme  $P$  se factorise sous cette forme  $P = 1(X - 5)X^2$ . Il est scindé.

Par contre  $X^2 + 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}[X]$  car il n'a pas de racines réelles.

### Exercice 5

Soit  $P = X^3 - 3X + 2$ . On sait que 1 est une racine double de  $P$ . Calculer  $P(-2)$ . Que peut-on en déduire sur la factorisation de  $P$  ?

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

## 3. étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

### 3.1. Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles sont aux polynômes ce que les nombres premiers sont aux nombres entiers : on ne peut pas les diviser.

**Définition.**

Un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  est dit **irréductible** sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si il vérifie les deux conditions :

1.  $\deg(P) \geq 1$ .
2. les seuls polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  qui divisent  $P$  sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme  $\lambda P$ , avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

**Remarque :**

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
2. Si un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 possède une racine  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ , alors il n'est pas irréductible sur  $\mathbb{K}$  puisqu'il est divisible par  $(X - \alpha)$ .
3. Si  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , il peut être irréductible sur  $\mathbb{R}$  mais réductible sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple.** Le polynôme  $X^2 + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$  mais il ne l'est pas sur  $\mathbb{C}$  puisqu'on peut le factoriser sous la forme  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ .

4. Un polynôme qui n'admet pas de racine dans  $\mathbb{R}$  n'est pas nécessairement irréductible sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple.** le polynôme  $X^4 + 2X^2 + 1$  n'admet pas de racine dans  $\mathbb{R}$  (puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x^4 + 2x^2 + 1 \geq 1$ ), mais il est réductible dans  $\mathbb{R}[X]$  car  $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ .

### 3.2. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

**Théorème.**

de D'Alembert-Gauß Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Propriété.

1. Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement les polynômes de degré 1 (  $aX + b$  avec  $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$  ).
2. Tout polynôme  $P$  non constant de  $\mathbb{C}[X]$  se décompose en un produit de polynômes de degré 1, autrement dit, tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .
3. Tout polynôme complexe de degré  $n \geq 1$  possède exactement  $n$  racines complexes comptées avec leur multiplicité.

### Propriété 20.

(Décomposition d'un polynôme sur  $\mathbb{C}[X]$ ) Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  de  $\mathbb{C}[X]$  et de coefficient dominant  $a_n$ . Le polynôme  $P$  se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) de la façon suivante :

$$P = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r} = a_n \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont les racines de  $P$  (réelles et complexes), de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_r$  et  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$ . En particulier,

on a :  $\sum_{k=1}^r m_k = n$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Exercice 6

Soit le polynôme  $P = X^2 + 4$ . Déterminer les racines complexes de  $P$  et en déduire sa factorisation en produit de facteurs irréductibles.

### 3.3. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Les racines de  $P$  sont soit réelles, soit complexes non réelles et conjuguées deux à deux avec le même ordre de multiplicité.

Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  les racines **réelles** de  $P$  de multiplicités respectives  $r_1, \dots, r_p$  et  $\delta_1, \overline{\delta_1}, \dots, \delta_q, \overline{\delta_q}$  les racines **complexes** de  $P$  de multiplicités respectives  $s_1, \dots, s_q$ .

Sur  $\mathbb{C}[X]$ , le polynôme  $P$  se factorise de manière unique sous la forme :

$$\begin{aligned} P(X) &:= a_n \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{r_j} \prod_{\ell=1}^q ((X - \delta_\ell)(X - \overline{\delta_\ell}))^{s_\ell} \\ &= a_n \underbrace{\prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{r_j}}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{\prod_{\ell=1}^q (X^2 - 2 \operatorname{Re}(\delta_\ell)X + |\delta_\ell|^2)^{s_\ell}}_{\in \mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

Pour tout  $\ell \in \{1, \dots, q\}$ , le polynôme  $X^2 - 2 \operatorname{Re}(\delta_\ell)X + |\delta_\ell|^2$  admet deux racines complexes non réelles conjuguées donc son discriminant est négatif. On vient de démontrer le résultat suivant :

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Propriété 21.

(Décomposition d'un polynôme sur  $\mathbb{R}[X]$ )

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ . Le polynôme  $P$  se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) de la façon suivante :

$$P = a_n \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{r_j} \prod_{\ell=1}^q \underbrace{\left( X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell \right)}_{\substack{\text{discriminant} \\ \text{strictement négatif}}}^{s_\ell}$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont les racines **réelles** de  $P$  de multiplicités respectives  $r_1, \dots, r_p$ ,  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$  et  $X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell$  sont des polynômes réels à discriminant négatif.

### Exercice 7

Soit  $P$  un polynôme réel de degré 7, de coefficient dominant 2, dont on connaît les racines suivantes :  $2i$  racine double et  $i$ ,  $-i$ ,  $-3$  racines simples.

1. En déduire la ou les racines complexes manquantes.
2. Donner la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis en déduire celle dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### Propriété.

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 ( $aX + b$  avec  $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ ) et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif ( $aX^2 + bX + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$  et  $\Delta < 0$ ).

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### 3.4. Recherche de racines entières pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers

**Technique.** Pour un polynôme  $P$  à coefficients entiers, on regarde le coefficient constant et on teste si les diviseurs de ce coefficient sont des racines. Si oui, on a trouvé les racines entières, sinon il n'y a pas de racines entières.

### 3.5. Exemple de décomposition en produit de polynômes irréductibles

Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  puis dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ .

#### Exercice 8

Trouvez une racine entière de  $P = 2X^3 + 7X^2 + 6X + 9$  puis décomposez-le en facteurs irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .

### 3.6. Relations coefficients-racines pour un polynôme scindé

Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de degré  $n$  et scindé sur  $\mathbb{K}$ . Notons  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ses racines distinctes ou non. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)



## 4. L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

### 4.1. Généralités

#### Définition 23.

On appelle **fraction rationnelle** (ou fonction rationnelle) à coefficients dans  $\mathbb{K}$  toute fonction  $F$  de la forme  $F : x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$  définie sur  $\mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} \mid B(x) = 0\}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ ,  $B$  n'étant pas le polynôme nul. Pour une telle fraction rationnelle, on écrira plus simplement  $F = \frac{A}{B}$  ou encore  $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ .

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  **$\mathbb{K}(X)$** .

**Exemple.**  $F(X) = \frac{X^2 + 3X + 1}{2X - 6}$  est une fraction rationnelle, c'est un élément de  $\mathbb{K}(X)$ .

#### Définition 24.

Soit  $F = \frac{A}{B}$  une fraction rationnelle. On dit que  $F$  est irréductible si  $A$  et  $B$  n'ont pas d'autres diviseurs communs que les polynômes constants non nuls.

**Exemple.** La fraction  $F(X) = \frac{X^2 + X}{X^2}$  n'est pas irréductible. Par contre, la fraction  $G(X) = \frac{X + 1}{X}$  est irréductible.

Désormais, on ne considère plus que des **fractions rationnelles irréductibles**.

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

**Définition 25.**

Soit  $F = \frac{A}{B}$  une fraction rationnelle irréductible.

- Les racines du polynôme  $A$  sont appelées les **racines ou zéros** de  $F$ .
- Les racines du polynôme  $B$  sont appelées les **pôles** de la fraction rationnelle  $F$ . Si  $a$  est un pôle de  $F$ , on appelle **ordre de multiplicité** de  $a$  en tant que pôle de  $F$  l'ordre de multiplicité de  $a$  en tant que racine de  $B$ .
- Si  $F$  n'est pas nulle, on appelle **degré** de  $F$  et on note  $\deg(F)$  le nombre entier relatif  $\deg(A) - \deg(B)$ .

[Début](#)
[Précédent](#)
[Suivant](#)
[Table](#)
[Plein écran](#)
[Fermer](#)

**Exemple.** On considère la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{X^2 + X - 2}{(X + 1)^2(X - 3)}$  de  $\mathbb{R}(X)$ .

## 4.2. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (La théorie)

### 4.2.1. Etape 1 : Partie entière et partie polaire/fractionnaire

**Technique.** Soit  $F = \frac{A}{B}$  une fraction rationnelle. On fait la **division euclidienne** de  $A$  par  $B$  : il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  tels que

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X), \quad \deg(R) < \deg(B)$$

On divise de chaque côté de l'égalité par  $B$  et on a :

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{B(X)Q(X) + R(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

Le polynôme  $Q$  est appelé la **partie entière** de  $F$  et  $\frac{R}{B}$  sa **partie polaire ou fractionnaire**.

**Exemple.** Déterminer les parties entières et polaires de

$$F(X) = \frac{4X^4 - 3X^2 + 2X - 1}{X^2 - 1}$$

### Exercice 9

Déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de

$$\frac{X^3 + 1}{X^2 + X}$$

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

## 4.2.2. Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Soit  $F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$  (après division euclidienne).

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on sait que  $B$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  et qu'il s'écrit  $B(X) = C(X - a)^m(X - b)^n \dots$  où  $a, b, \dots$  sont les racines de  $B$  de multiplicités respectives  $m, n, \dots$ , et  $C$  est le coefficient dominant de  $B$ . On a ainsi

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X - a)^m(X - b)^n \dots}.$$

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on sait que  $B$  se décompose sur  $\mathbb{R}$  sous la forme

$$B(X) = C(X - a)^m \dots (X - b)^n \dots (X^2 + b_1X + c_1)^p (X^2 + b_pX + c_p)^q \dots$$

où  $a, b, \dots$  sont les racines réelles de  $B$  de multiplicités respectives  $m, n, \dots$ ,  $C$  est le coefficient dominant de  $B$  et où le discriminant des trinômes  $(X^2 + b_iX + c_i)$  est strictement négatif,  $p, q, \dots$  étant des entiers strictement positifs. On a ainsi

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X - a)^m \dots (X - b)^n \dots (X^2 + b_1X + c_1)^p (X^2 + b_pX + c_p)^q \dots}.$$

**Exemple.** On avait décomposé  $F(X) = \frac{4X^4 - 3X^2 + 2X - 1}{X^2 - 1}$  sous la forme  $F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{X^2 - 1}$ . En factorisant le dénominateur, on a

$$F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{(X - 1)(X + 1)}$$

### Exercice 10

On a obtenu précédemment

$$\frac{X^3 + 1}{X^2 + X} = (X - 1) + \frac{X + 1}{X^2 + X}$$

Décomposer le dénominateur sous forme d'un produit de facteur irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ . Que remarque-t-on ?

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

### 4.2.3. Etape 3 : Décomposition de la partie fractionnaire en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

#### Définition.

On appelle **élément simple** de  $\mathbb{C}(X)$  toute fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\lambda}{(aX + b)^\alpha} \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{N}^* \text{ et } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

**Exemples.**

**Théorème 27.**

Soit  $F = \frac{A}{B}$  une fraction rationnelle irréductible de  $\mathbb{C}(X)$ . On note  $a, b, \dots$  les pôles de  $F$  de multiplicités respectives  $m, n, \dots$ . On note  $Q(X)$  la partie entière de  $F(X)$ . La fraction rationnelle  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$F(X) = Q(X) + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m} \\ + \frac{\beta_1}{X-b} + \frac{\beta_2}{(X-b)^2} + \dots + \frac{\beta_n}{(X-b)^n} + \dots$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  sont des complexes, les nombres  $\alpha_m$  et  $\beta_n$  étant non nuls.

Cette écriture s'appelle la **décomposition en éléments simples** de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$ . La partie  $\frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m}$  s'appelle la **partie polaire** de  $F$  relative au pôle  $a$ .

**Remarque :** Les techniques pour trouver les coefficients à mettre sur les éléments simples seront vues à la fin de cette section.

**Exemples.** On a  $F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$ . La décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}(X)$  est

$$F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

[Début](#)
[Précédent](#)
[Suivant](#)
[Table](#)
[Plein écran](#)
[Fermer](#)

### Exercice 11

Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}(X)$  de  $F(X) = 1 + \frac{X^3+X-1}{(X-1)(X^3-1)}$ .

#### 4.2.4. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

##### Définition 28.

On appelle **élément simple** de  $\mathbb{R}(X)$  toute fraction rationnelle de l'une des formes suivantes :

- $\frac{\alpha}{(aX + b)^m}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- $\frac{\lambda X + \mu}{(aX^2 + bX + c)^p}$  où le discriminant du dénominateur  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , et  $(\lambda, \mu, c, d) \in \mathbb{R}^4$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ .

##### Exemples.

### Exercice 12

Parmi les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{2X-2}{X-1}, \quad \frac{2X-1}{(X-1)^3}, \quad \frac{2}{(X^2+1)^2}, \quad \frac{2X+1}{X^2-4X+3},$$

quelles sont celles qui sont des éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  ?

Soit  $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$  une fraction rationnelle irréductible de  $\mathbb{R}(X)$ , avec  $Q$  la partie entière de  $F$ . On note  $a, b, \dots$  les pôles de  $F$  de multiplicités respectives  $m, n, \dots$ . On suppose que le dénominateur  $B$  se décompose sous la forme

$$B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n \dots (X^2+cX+d)^p(X^2+eX+f)^q \dots$$

où  $C$  est le coefficient dominant de  $Q$ , où  $a, b, \dots$  sont les racines réelles de  $Q$ , où les

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

réels  $c, d, e, f, \dots$  sont tels  $c^2 - 4d < 0$ ,  $e^2 - 4f < 0$ , ... et où  $p, q, \dots$  sont des entiers strictement positifs.

### **Théorème 29.**

La fraction rationnelle  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{aligned} F(X) = & Q(X) + \frac{\alpha_1}{X-a} + \dots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m} + \frac{\beta_1}{X-b} + \dots + \frac{\beta_n}{(X-b)^n} + \dots \\ & + \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2 + cX + d} + \dots + \frac{\lambda_p X + \mu_p}{(X^2 + cX + d)^p} \\ & + \frac{\gamma_1 X + \delta_1}{X^2 + eX + f} + \dots + \frac{\gamma_q X + \delta_q}{(X^2 + eX + f)^q} + \dots \end{aligned}$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q, \delta_1, \dots, \delta_q$  sont des complexes tels que  $\alpha_m \neq 0$ ,  $\beta_n \neq 0$ ,  $(\lambda_p, \mu_p) \neq (0, 0)$  et  $(\gamma_q, \delta_q) \neq (0, 0)$ .

Cette écriture s'appelle la **décomposition en éléments simples** de  $F$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

La partie  $\frac{\alpha_1}{X-a} + \dots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m}$  s'appelle la **partie polaire** de  $F$  relative au pôle  $a$ .

Pour chaque facteur de la décomposition de  $B$ , on ajoute un terme à la décomposition de  $\frac{R}{B}$ , selon la règle présentée dans le tableau ci-dessous. On a alors  $\frac{R}{B}$  sous la forme d'une **SOMME** d'éléments simples, chaque élément simple contenant des coefficients inconnus.

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

facteur de $B$	Elements simples
$(aX + b)$	$\frac{\lambda}{aX + b}$
$(aX + b)^2$	$\frac{\lambda_1}{aX + b} + \frac{\lambda_2}{(aX + b)^2}$
$(aX + b)^3$	$\frac{\lambda_1}{aX + b} + \frac{\lambda_2}{(aX + b)^2} + \frac{\lambda_3}{(aX + b)^3}$
$\dots$	$\dots$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Pour les décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$ , on a en plus (avec  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ) :

facteur de $B$	Elements simples
$(aX^2 + bX + c)$	$\frac{\lambda X + \mu}{aX^2 + bX + c}$
$(aX^2 + bX + c)^2$	$\frac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \frac{\lambda_2 X + \mu_2}{(aX^2 + bX + c)^2}$
$(aX^2 + bX + c)^3$	$\frac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \frac{\lambda_2 X + \mu_2}{(aX^2 + bX + c)^2} + \frac{\lambda_3 X + \mu_3}{(aX^2 + bX + c)^3}$
$\dots$	$\dots$

### Exercice 13

Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}(X)$  de  $F(X) = \frac{2X}{(X-1)^2(X-2)(X^2+1)}$ .



### 4.3. Exemple de décomposition fraction rationnelle sur $\mathbb{R}(X)$ et Etape 4

Voici la méthode pour décomposer n'importe quelle fraction rationnelle  $F = \frac{A}{B}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}(X)$ , appliquée sur l'exemple

$$F(X) = \frac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 2X + 1)}$$

#### **Etape 4 : Recherche des coefficients inconnus de la décomposition**

On a obtenu la forme générale de la décomposition, il ne reste plus qu'à trouver la valeur des constantes intervenant dans celle-ci. Il existe pour cela plusieurs techniques :

**Méthode prioritaire : Les termes de plus haut degré** Pour un pôle  $\alpha$  (racine du dénominateur),

on repère la fraction  $\frac{\lambda}{(X - \alpha)^{n_i}}$  qui est de plus haut degré  $n$ . On multiplie de chaque côté de l'égalité par  $(X - \alpha)^n$ . Puis on pose  $x = \alpha$ , et on obtient alors la constante du terme de plus haut degré.

Et on recommence pour tous les pôles.

**Méthode de secours** Quand on a fait tous les termes faciles, on cherche à établir autant d'équations que de coefficients restant à déterminer en prenant des valeurs de  $x$  qu'on n'a pas encore déterminé (et de préférences simples).

#### **Exercice 14**

On a  $F(X) = \frac{2X + 1}{(X - 1)^2}$  et on sait que sa décomposition en élément simple est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2}$$

Déterminer  $a$  et  $b$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

## 5. TD 12 polynômes et fractions rationnelles

### Exercice 1

(★) Effectuer la division euclidienne de  $A = X^5 - X^4 + X^2 - 4X + 2$  par  $B = X^2 - 2$ . Le polynôme  $B$  divise-t-il le polynôme  $A$  ?

### Exercice 2

(★★) Effectuer la division euclidienne de  $X^3 + 7X^2 - 2$  par  $X^2 + X + 1$ . En déduire les éventuelles asymptotes au graphe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1}$ .

### Exercice 3

(★★) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . À quelle(s) condition(s) le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  ?

### Exercice 4

(★★) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Trouver le reste de la division euclidienne de

1.  $X^n$  par  $(X - 1)$  puis par  $(X - 1)(X - 2)$ .
2.  $X^{2n} + X^2 - 1$  par  $X^2 - 1$ .
3.  $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$  par  $(X - 1)^2$ .

### Exercice 5

(★★★) Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels dont les restes dans la division euclidienne par  $(X - 1)$ , par  $(X - 2)$  et par  $(X - 3)$  sont respectivement 3, 7 et 13. Soit  $R$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ .

1. Déterminer les valeurs de  $R$  en 1, 2 et 3.
2. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $Q = a(X - 1)(X - 2) + b(X - 1)(X - 3) + c(X - 2)(X - 3)$ . Que valent  $Q(1)$ ,  $Q(2)$  et  $Q(3)$  ? Déterminer  $a, b$  et  $c$  tels que  $Q(1) = R(1)$ ,  $Q(2) = R(2)$  et  $Q(3) = R(3)$ . En déduire le polynôme  $R$ .

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

**Exercice 6**

(★) Soit  $P = X^2 - (1 + i)X + i \in \mathbb{C}[X]$ .  $P$  est-il irréductible ? Calculer  $P(1)$  et  $P(i)$ . Que peut-on en déduire ?

**Exercice 7**

(★★) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  et  $a$  un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  et  $a$  pour que  $a$  soit une racine triple du polynôme :

$$Q(X) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

**Exercice 8**

(★★) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(0)^2 + P(1)^2 + P(4)^2 + P(7)^2 = 0$ . Montrer que  $P$  est le polynôme nul.

**Exercice 9**

(★★) On considère le polynôme  $D = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ . Chercher les racines entières de  $D$  et déterminer leurs multiplicités puis factoriser  $D$  en un produit de facteurs irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 10**

(★★) Vérifier que  $1 + i$  est une racine de  $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$  et en déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 11**

(★★) Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes :

$$P_1(X) = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 8X + 8,$$

$$P_2(X) = -3X^4 + 3,$$

$$P_3(X) = X^5 + 1,$$

$$P_4(X) = X^4 + X^2 + 1.$$

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Exercice 12

(★★) Déterminer la partie entière et la partie fractionnaire des fractions rationnelles suivantes dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$\frac{X^2 - 3X + 1}{(X - 1)(2X + 1)(3X - 5)}, \quad \frac{3X^2 + 2X + 2}{X^2 - 1}.$$

### Exercice 13

(★) Décomposer formellement (i.e. sans calculer les coefficients) en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$\begin{aligned} & \frac{2X - 1}{(X - 1)(2X + 1)}, \quad \frac{3}{(X + 1)^2(X - 2)}, \quad \frac{8}{(3X - 4)^3}, \quad \frac{X - 1}{X^2 + 2X + 1}, \\ & \frac{2X + 8}{2X^2 + 1}, \quad \frac{2}{(X + 6)(X^2 - 4X + 17)}, \quad \frac{6X^2 + 1}{(2X - 7)^2(X^2 - 1)(X^2 + X + 7)^2}. \end{aligned}$$

### Exercice 14

(★★) Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} f_1(X) &= \frac{2X^2 - 15X + 33}{X^2 - 4X - 5} & f_2(X) &= \frac{37 - 11X}{(X + 1)(X - 2)(X - 3)} \\ f_3(X) &= \frac{-19X^2 + 50X - 25}{3X^3 - 5X^2} & f_4(X) &= \frac{18X^3 + 12X^2 + 35X + 5}{9X^2 + 6X + 17} \\ f_5(X) &= \frac{X^3 - 4X^2 + 11X - 13}{X^2 - 2X + 1} & f_6(X) &= \frac{1}{(X^2 + 1)^3} \\ f_7(X) &= \frac{1}{(X^2 - 1)^2} & f_8(X) &= \frac{X^4 + X^3 + 3X^2 + 1}{(X^2 + 1)^2 X} \end{aligned}$$

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

### Exercice 15

#### Devoir maison (★★)

1. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $Q = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ .
2. Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{3X^4 + 13X^3 + 16X^2 + 13X - 4}{X^3 + 4X^2 + 4X + 3}$$

[Début](#)[Précédent](#)[Suivant](#)[Table](#)[Plein écran](#)[Fermer](#)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensemble des polynômes à coefficients dans <math>\mathbb{K}</math></b>	<b>1</b>
1.1	Définitions et opérations . . . . .	1
1.2	Degré d'un polynôme . . . . .	4
1.3	Arithmétique des polynômes . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Racines d'un polynôme</b>	<b>7</b>
2.1	Définitions et caractérisations . . . . .	7
2.2	Factorisation d'un polynôme . . . . .	10
<b>3</b>	<b>étude de <math>\mathbb{C}[X]</math> et <math>\mathbb{R}[X]</math></b>	<b>11</b>
3.1	Polynômes irréductibles . . . . .	11
3.2	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	12
3.3	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	14
3.4	Recherche de racines entières pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers . . . . .	16
3.5	Exemple de décomposition en produit de polynômes irréductibles . . . .	16
3.6	Relations coefficients-racines pour un polynôme scindé . . . . .	16
<b>4</b>	<b>L'ensemble <math>\mathbb{K}(X)</math> des fractions rationnelles</b>	<b>17</b>
4.1	Généralités . . . . .	17
4.2	Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (La théorie)	18
4.2.1	Etape 1 : Partie entière et partie polaire/fractionnaire . . . . .	18
4.2.2	Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles	19
4.2.3	Etape 3 : Décomposition de la partie fractionnaire en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . .	20
4.2.4	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . .	22
4.3	Exemple de décomposition fraction rationnelle sur $\mathbb{R}(X)$ et Etape 4 . .	25
<b>5</b>	<b>TD 12 polynômes et fractions rationnelles</b>	<b>26</b>

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer