13. Vecteurs de \mathbb{R}^n

 \mathbb{R}^n est l'ensembles des n-uplets d'éléments de \mathbb{R} , c'est à dire $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ avec x_1,x_2,\cdots des réels. On appelle ces éléments des <u>vecteurs</u>. On peut les additionner et les multiplier par des constantes, donc on dit que \mathbb{R}^n est un espace vectoriel (on approfondira cette notion au second semestre). Pour les calculs, on note les vecteurs en colonne.

On note $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ le vecteur nul (de la taille adéquate).

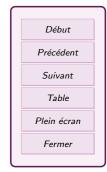
1. Familles de vecteurs de \mathbb{R}^n

Définition 1.

Soit $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs de la famille \mathcal{F} tout vecteur X qui peut s'écrire

$$X = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k U_k = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$



1.1. Familles libres

Définition 2.

Soit (U_1, U_2, \dots, U_p) une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n .

On dit que la famille (U_1, U_2, \dots, U_p) est libre si et seulement

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

est uniquement possible avec $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. Dans ce cas, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \ge 2$). Les vecteurs de la famille sont (linéairement indépendants).

Dans le cas contraire (où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls) la famille (U_1, U_2, \dots, U_p) est liée. Un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \ge 2$).

Exemples.

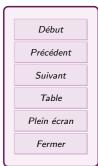
- 1. Une famille à un vecteur (X) est libre si, et seulement si, X est non nul.
- 2. Une famille qui contient le vecteur nul $\vec{0}$ est liée. En effet $1.\vec{0}+0.X_1+\cdots+0.X_n=0$ et les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.
- 3. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires est liée.

Technique. On veut étudier si la famille de vecteurs (U_1, U_2, \dots, U_p) de \mathbb{R}^n est <u>libre ou liée</u>. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

On cherche ensuite les solutions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

— Si la seule solution possible est que les λ_i sont nuls, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, alors la famille est (libre).



— Si on trouve une (ou plusieurs) solution avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, alors la famille est liée.

Exemple. On étudie si la famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (0, 1, 1)$ est libre

Exercice 1

La famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (3, 2, 1), \ v_2 = (1, 1, 2), \ v_3 = (7, 4, 0)$ est-elle libre ou liée?

1.2. Familles génératrices

Définition 3.

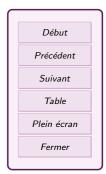
Une famille $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ de vecteur de \mathbb{R}^n est génératrice de \mathbb{R}^n si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut s'écrire au moins d'une façon comme combinaison linéaire des U_i . C'est à dire pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p$$

Technique. On étudie si une famille (U_1, \ldots, U_p) de vecteurs de \mathbb{R}^n est génératrice de \mathbb{R}^n . Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = X$.

- Si on peut trouver au moins une solution $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sans aucune condition sur X (pas d'équation auxiliaire), alors la famille (U_1, \ldots, U_p) est génératrice de \mathbb{R}^n .
- Si il y a des conditions sur X pour trouver des solutions $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (les équations auxiliaires), alors la famille (U_1, \ldots, U_p) n'est **pas** génératrice de \mathbb{R}^n .

Exemple. La famille $(v_1,v_2,v_3)=\left((1,2,1),(3,1,2),(3,-4,1)\right)$ est-elle une famille génératrice de \mathbb{R}^3 ?



La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 1), (0, 2, 1))$ est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?

1.3. Bases de vecteurs

Définition 4.

Une famille de vecteurs (U_1, U_2, \dots, U_n) de \mathbb{R}^n est appelée base de \mathbb{R}^n si cette famille est libre et génératrice

Exemple. Dans \mathbb{R}^n , la famille de vecteurs $(E_1, E_2, \dots E_n)$ de \mathbb{R}^n , formée de $E_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $E_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ... $E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est une base, appelée la base canonique de \mathbb{R}^n .

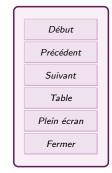
Corollaire 5.

- 1. Une famille génératrice de n vecteurs de \mathbb{R}^n est une base.
- 2. Une famille libre à n vecteurs dans \mathbb{R}^n est une base.

Remarque: Les familles de n vecteurs de \mathbb{R}^n ne sont pas toutes des bases, attention!

Exercice 3

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((2, 1, 0), (0, 3, 1), (1, 1, 1))$ forme-t-elle une base de \mathbb{R}^3 ?



Théorème 6.

Si $\mathcal{B}=(U_1,U_2,\ldots,U_n)$ est une base de \mathbb{R}^n , alors pour tout vecteur X de \mathbb{R}^n , il existe des coefficients $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ uniques tels que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_n U_n$$

X s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{B} . Le n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appelle les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} .

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur X=(x,y,z) a pour coordonnées (x,y,z) dans la base canonique $(E_1(1,0,0),E_2(0,1,0),E_3(0,0,1))$.

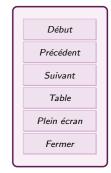
Exercice 4

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((2, 1, 0), (0, 3, 1), (1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Donner les coordonnées du vecteur $(2, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.

1.4. Matrices de passage

Définition 7.

Soit $\mathcal{B}=(U_1,U_2,\ldots,U_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La matrice de la famille \mathcal{B} est formée en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille \mathcal{B} .



Définition 8.

Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de \mathbb{R}^n et \mathcal{C} la base canonique. La matrice de la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ est appelée matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} et on la note $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. C'est une matrice carrée et inversible.

Remarque : La famille de vecteurs $(E_1, E_2, \dots E_n)$ de \mathbb{R}^n , formée de $E_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $E_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots$ $E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est une base, appelée la base canonique de \mathbb{R}^n . Sa matrice est l'identité.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 , on considère la base canonique $\mathcal{C} = (E_1(1,0), E_2(0,1))$ et la famille $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1)$. Les vecteurs U et V sont indépendants (donc libre) et la famille contient 2 vecteurs, donc \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^2 . La matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} est

$$P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 5

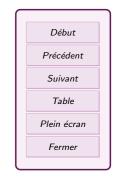
Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}_1 la base de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,2,1), (2,3,3), (3,7,1))$$

Donner la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B}_1 .

Utilisation des matrices de passage. Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$ une autre base de \mathbb{R}^n de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. On considère $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . (x_1, \dots, x_n) correspond aussi aux coordonnées de X dans la base canonique.

Les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} sont (x'_1, \ldots, x'_n) , ce qui signifie que $X = x'_1U_1 + \cdots + x'_nU_n$. On pose les coordonnées en colonne, en précisant par un indice \mathcal{B} ou \mathcal{C} dans



quelle base on est:

$$X_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Propriété 9.

Avec les notations précédentes :

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}},$$
 et $X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1}X_{\mathcal{C}}$

Remarque : La deuxième égalité signifie que, pour trouver les coordonnées d'un vecteur X dans une nouvelle base \mathcal{B} , il suffit de multiplier X par l'inverse de la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} .

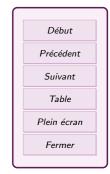
Exemple. On considère $\mathcal{B} = (U(1,1),V(-1,1))$ base de \mathbb{R}^2 . Sa matrice de passage est $P(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit un vecteur X de coordonnées (a,b) dans la base \mathcal{B} , c'est à dire X = aU + bV. Alors, les coordonnées de X dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

Soit X de coordonnées canoniques (x,y). On veut calculer les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} . On a donc besoin de $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}' sont donc

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

C'est à dire $X = \frac{x+y}{2}U + \frac{y-x}{2}V$.



Soit $\mathcal C$ la base canonique de $\mathbb R^3$ et $\mathcal B_1$ la famille de $\mathbb R^3$ définie par : $\mathcal B_1=\big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big)$. On a

$$P(C, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(C, \mathcal{B}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit X vecteur de coordonnées canoniques (1,-3,2). Donner les coordonnées de X dans la base \mathcal{B}_1 .

On sait donc passer de la base canonique à \mathcal{B} (grâce à $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}$) et de \mathcal{B} à la base canonique (grâce à $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$). Comment passer d'une base quelconque à une autre base quelconque?

Définition 10.

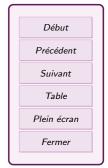
Soient deux bases de \mathbb{R}^n : \mathcal{B} de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et \mathcal{B}' de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$. La matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' est la matrice

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1} P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$$

.

Démonstration. On considère deux bases de \mathbb{R}^n : \mathcal{B} de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et \mathcal{B}' de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$. Soit un vecteur X (on est donc implicitement en base canonique). Notons $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B} et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B}' . On veut des formules pour passer de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement. D'après ce qui précède, on a les relations suivantes :

$$(1)X = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, (2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}X, (3)X = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}, (4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')^{-1}X$$



On reporte (3) dans (2) et (1) dans (4):

$$(2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},$$

$$(4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}'))^{-1}X_{\mathcal{B}}$$

On a donc des formules directes pour aller de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement, en utilisant $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$.

Propriété 11.

Soit un vecteur X de \mathbb{R}^n , avec $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B} et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B}' . On a alors

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B}, \underline{\mathcal{B}}') X_{\mathcal{B}'}, \quad \text{et} \quad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

Propriété 12.

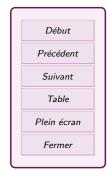
1. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de \mathbb{R}^n . On a

$$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$

2. Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de \mathbb{R}^n , l'inverse de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, autrement dit

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

3. Les colonnes de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' sont formées avec les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' exprimés dans la base \mathcal{B} .



Remarque : En particulier, on remarque que la matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' peut se calculer par $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{B}, \mathcal{C}, P(\mathcal{C}, \mathcal{B}'))$.

Exemple. On note \mathcal{C} la base canonique et on considères toujours $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1))$ base de \mathbb{R}^2 . La matrice de passage de \mathcal{C} vers \mathcal{B} est $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on sait que

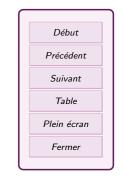
$$P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Donc $P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on peut en déduire les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base \mathcal{B} . Le vecteur (1,0) a pour coordonnées (1/2, -1/2) et les vecteur (0,1) a pour coordonnées (1/2, 1/2) dans la base \mathcal{B} .

Effet des changements de base sur les systèmes Soit AX = B un système d'équation linéaires de n lignes et n inconnues (donc A est une matrice carrée). On considères une base \mathcal{B} , et $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} . On exprime X et B dans la base $\mathcal{B}: X = PX_{\mathcal{B}}$ et $B = PB_{\mathcal{B}}$, qu'on reporte dans le système

$$AX = B \Leftrightarrow APX_{\mathcal{B}} = PB_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$$

On a transformé le système AX = B en un système $A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$, où $A' = P^{-1}AP$. On verra quand on parlera de diagonalisation l'intérêt de A'.



2. Sous-espace vectoriels dans \mathbb{R}^n

2.1. Définition

Définition 13.

Un sous-ensemble (une partie) F de \mathbb{R}^n est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1. $\vec{0} \in F$: le **vecteur nul** appartient à F.
- 2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall X,Y \in F, \quad \lambda X + Y \in F$. C'est-à-dire que F est stable par addition et par multiplication par un scalaire.

Exemples.

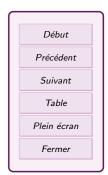
- 1. \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . En fait, \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- 2. $\{\vec{0}\}$ (le sous ensemble de \mathbb{R}^n ne contenant que le vecteur nul) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- 3. Dans \mathbb{R}^2 , toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel. Dans \mathbb{R}^3 , tout plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel.

Exercice 7

On se place dans \mathbb{R}^3 et on considère l'ensemble

$$F = \{(x, 0, 0), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

- 1. Donner deux exemples de vecteurs de F.
- 2. Soient X = (x, 0, 0) et Y = (y, 0, 0) deux vecteurs de F, et λ un réel. Calculer $X + \lambda Y$. Est-ce que ce vecteur est dans F?
- 3. Que vient-on de démontrer pour F?



Propriété.

Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est stable par combinaisons linéaires. Autrement dit, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall (V_1, \dots, V_n) \in F^n, \ \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n \in F.$$

2.2. sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 15.

Soit $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ une famille de m vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle $(\text{Vect}(\mathcal{F}))$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{F} :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m, \text{ avec } \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

 $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré) par la famille \mathcal{F} .

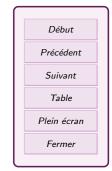
Remarque : Vect(\mathcal{F}) ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de la famille \mathcal{F} .

Exemples.

- 1. Si $\mathcal{F} = \{X\}$ ne contient qu'un seul vecteur, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à X. C'est une droite vectorielle.
- 2. Dans \mathbb{R}^2 , Vect($\{(2,3),(-1,2),(5,4)\}$) est formé des vecteurs

$$X = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 5c \\ 3a + 2b + 4c \end{pmatrix}$$

3. Si \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^n , alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$.



Dans \mathbb{R}^3 , donner les vecteurs de $F = \text{Vect}\{(0, 1, 9), (2, 3, 4)\}.$

Définition 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et \mathcal{F} une famille de vecteurs. Si $F = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$, on dit que la famille \mathcal{F} engendre F, ou encore que les vecteurs de \mathcal{F} forment une famille génératrice de F.

Exemple.

- 1. Si \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n , comme $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^n$, alors \mathcal{B} engendre \mathbb{R}^n .
- 2. La droite vectorielle $\{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est engendrée par le vecteur X.

2.3. Sous-espace vectoriel défini par des équations

Propriété 17.

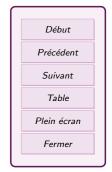
Soit A une matrice de $\mathcal{M}(n,p)$ et (S) le système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (où X est le vecteur de inconnus de taille p et $\vec{0}$ le vecteur nul de taille n). Alors l'ensemble des solutions de (S) forment un sous-espace vectoriel.

Autrement dit, le sous-ensemble

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^p, \quad AX = \vec{0} \right\}$$

est un (sous-espace vectoriel) de \mathbb{R}^p .

Exemple.
$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{cc} 2x & +4y & =0 \\ 3x & -5y & =0 \end{array} \right\} \text{ est un sous espace vectoriel, avec} \right.$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Notons S l'ensemble des solutions du système (S). Le vecteur nul de taille p est une solution évidente du système, donc $\vec{0}$ est dans S. Soient X,Y deux vecteurs de S (donc des solutions du systèmes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $\lambda X + Y$ est dans S:

$$A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda \underbrace{(AX)}_{=\vec{0}} + \underbrace{AY}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

 $\lambda X + Y$ est bien une solution du système, donc $\lambda X + Y \in S$. Donc S est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

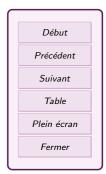
Définition.

Soit A une matrice ligne de taille (1,p) et $AX=\vec{0}$ l'équation (en une seule ligne) associée. L'ensemble des solutions de l'équation $AX=\vec{0}$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p , qu'on appelle hyperplan défini par l'équation $AX=\vec{0}$.

Remarque : L'équation AX = 0 n'est pas unique. L'hyperplan peut être définie par une autre équation.

Exemples.

- 1. Dans \mathbb{R}^2 , un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme ax + by = 0. C'est donc une droite passant par O.
- 2. Dans \mathbb{R}^3 , un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme ax + by + cz = 0. C'est donc un plan passant par O.



Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de \mathbb{R}^2 définis par un système linéaire d'équations homogènes? Donner la matrice du système dans ce cas.

- 1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x^2\}$
- 2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = y\}$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par un système linéaire d'équations homogènes? Donner la matrice du système dans ce cas.

- 1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + 1\}$
- 2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x\}$
- 3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x y = 0 \text{ et } 2x z = 0\}$

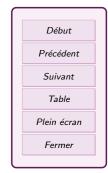
Question bonus : prouvez que les ensembles qui ne sont pas définis par un système d'équations linéaires ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

2.4. Famille génératrice et système d'équations

Un sous-espace vectoriel peut être défini à partir d'une famille génératrice ou d'un système d'équations, et il existe des méthode pour aller de l'un à l'autre. Par contre, attention à **l'ordre** des inconnues dans le système! Il ne doit jamais changer en cours de route!

Technique. Soit $AX = \vec{0}$ un système d'équations linéaires à p inconnues et $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$ le sous-espace vectoriel formé des solutions de $AX = \vec{0}$. On veut écrire F à l'aide d'une famille génératrice.

On commence à le résoudre avec la $\underbrace{\text{méthode du pivot partiel de Gauss}}$. Comme le second membre ne contient que 0, il ne peut pas y avoir d'équation auxiliaire 0 = b avec



 $b \neq 0$, il y a toujours des solutions. Si il y a une unique solution (toutes les variables ont un pivot), cette solution est le vecteur nul, donc $F = \{\vec{0}\}\$.

Sinon, il y a des variables auxiliaires (sans pivot) qu'on doit remplacer par des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pour résoudre. Notons que si il y a r pivots, il y aura p-r paramètres à poser.

Ainsi, tout vecteur X de F (solution du système) s'écrit à l'aide des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. On décompose X en une somme de vecteurs : le premier ne contenant que le paramètre λ_1 , le second que le paramètre λ_2, \ldots puis pour chaque vecteur, on met le paramètre en facteur devant (de la forme $\lambda_i V_1$ avec V_i ne contenant plus de paramètres).

On a alors écrit X comme une combinaison linéaires de vecteurs fixes multipliés par les paramètres λ_i . On reconnait alors l'écriture d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteur (V_1, V_2, \dots) , c'est à dire $F = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots)$. Remarquons que F est engendré par p-r vecteurs.

Exemple. Si les solutions S d'un système à trois inconnues sont de la forme suivante :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel des solutions est donc engendré par la famille de deux vecteurs

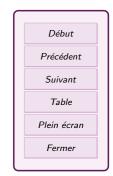
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ c'est à dire } S = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 10

Soit F le sous-espace vectoriel des vecteurs de \mathbb{R}^2 vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 26x + 13y = 0 \end{cases}$$

Donner une famille génératrice de F, c'est-à-dire écrire $F = \text{Vect} \cdots$.



Technique. Soit $F = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots)$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p engendré par une famille de vecteur. On chercher cette fois à l'écrire à l'aide d'un (système d'équations).

Soit X un vecteur de F de coordonnées (x_1, x_2, \ldots) , alors X se décompose comme combinaison linéaire $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On obtient alors une égalité de vecteurs :

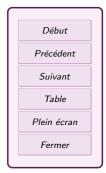
$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous forme de système (en enlevant les parenthèses des vecteurs). On obtient alors un système (S) où les λ_i sont les **inconnues** et les x_i les seconds membres. On commence à résoudre ce système avec la (méthode du pivot de Gauss partiel).

Mais attention, ce ne sont pas les solutions qui nous intéressent, ce sont les équations auxiliaires. Ce sont des équations contenant les coordonnées x_i de X. X est dans F si et seulement si les équations auxiliaires sont vérifiées. Donc F est définie par le système formé uniquement des équations auxiliaires.

Exercice 11

On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{(1,2,0),(-1,0,1)\}$. Déterminer le système d'équation qui caractérise F.



3. Base d'un sous-espace vectoriel

Définition 19.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On appelle base de F toute famille de vecteurs $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ telle que

- 1. \mathcal{F} engendre F, c'est à dire $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
- 2. \mathcal{F} est une famille libre, c'est à dire que les vecteurs (X_1, X_2, \dots, X_r) sont indépendants.

Exemple. Soit X un vecteur non nul et F = Vect(X) droite vectorielle engendrée par X. Alors (X) est une base de F, puisqu'elle est génératrice et libre.

Propriété 20.

La famille $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ est une base du sous espace vectoriel F si et seulement si tout vecteur X de F peut s'écrire **d'une façon et d'une seule** comme combinaison linéaire des X_i :

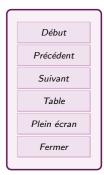
$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i.$$

C'est à dire que les réels λ_i existent et sont uniques pour chaque $X \in F$.

3.1. Existence de base et dimension

Si F est un espace vectoriel engendré par une famille \mathcal{F} , on peut trouver une base en choisissant certains vecteurs de \mathcal{F} de manière à avoir une deuxième famille \mathcal{F}' , qui engendre toujours F et qui est libre (donc une base). On peut même créer plusieurs bases (mais elles auront toujours le même nombre de vecteurs!).

D'une manière générale, on a le théorème suivant :



Théorème 21.

Tout sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n possède une base \mathcal{B} .

De plus, toutes les bases d'un sous-espace vectoriel F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de F. On le note dim(F).

Exemples.

- 1. le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ formé du seul vecteur nul a, par convention, une base vide. Donc sa dimension est $dim(\{\vec{0}\}) = 0$. C'est même le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.
- 2. \mathbb{R}^n (vu comme un sous-espace vectoriel) a comme base la base canonique par exemple. Cette base contient n éléments, donc $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- 3. Soit X un vecteur non nul et F = Vect(X). (X) étant une base de F, on a $\dim(F) = 1$

Exercice 12

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs u=(1,1,1,1) et v=(1,2,1,-3).

Quelle est la dimension de F? En donner une base.

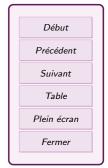
Propriété 22.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On a alors

$$0 \leqslant dim(F) \leqslant n$$

De plus:

- Si dim(F) = 0, alors $F = \{\vec{0}\}$.
- Si dim(F) = n, alors $F = \mathbb{R}^n$.



Propriété 23.

Si F et E sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n vérifiant $E \subset F$, alors on a $dim(E) \leq \dim(F)$.

De plus, si $E \subset F$ et $dim(E) = \dim(F)$, alors E = F.

La dimension d'un sous espace vectoriel impose des conditions sur le nombre d'éléments des familles libres, génératrices et des bases.

Propriété 24.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension dim(F):

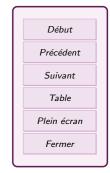
- Toute famille libre de vecteurs de F contient au maximum dim(F) vecteurs. De plus, si une famille libre contient exactement dim(F) vecteurs, alors c'est une base.
- Toute famille génératrice de vecteurs de F contient au minimum dim(F) vecteurs. De plus, si une famille génératrice contient exactement dim(F) vecteurs, alors c'est une base.

Remarque : En nombre d'éléments, on a libre \leq base \leq génératrice.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

- Toute famille \mathcal{F} génératrice de F contient une base.
- De plus, si \mathcal{F} est génératrice de F et si \mathcal{G} est une famille libre de F, alors on peut compléter \mathcal{G} avec des vecteurs de \mathcal{F} pour former une base de F
- (Théorème de la base incomplète) Toute famille libre de F peut être complétée en une base.



3.2. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 26.

Si F et G sont deux s.e.v. de \mathbb{R}^n , alors leur intersection

$$F \cap G = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \in F \text{ et } v \in G \}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , les sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x-y+3z=0\}$ sont des sous-espaces vectoriels. Donc $F \cap G$, qui est le sous-ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+3z=0\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Remarque: Attention, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel!

Exercice 13

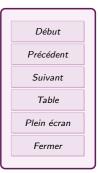
Soient $P=\mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ un plan et D la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par u=(2,0,1). Montrer que $D\cap P=\{(0,0,0)\}$.

3.3. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 27.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . L'ensemble $F+G=\{u+v,\ u\in F,\ v\in G\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G.

Autrement dit, F+G est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.



Définition 28.

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de \mathbb{R}^n sont supplémentaires si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de F.

Théorème 29.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si, et seulement si,

$$F + G = \mathbb{R}^n$$
 et $F \cap G = \{0_n\}.$

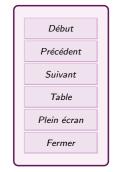
Dans ce cas, on note $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 , on considère $F = \text{Vect}\{(-1,1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(2,2)\}$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la décomposition d'un vecteur X(x,y) sur $F \oplus G$.

4. TD 13 Vecteurs de \mathbb{R}^n

Exercice 1

(*) Dans
$$\mathbb{R}^2$$
, on considère la famille (X_1, X_2, X_3) avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que cette famille est liée.



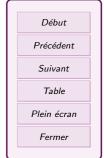
 $(\star\star)$ Dans chacun des cas, déterminer si les vecteurs forment une famille libre, une famille génératrice ou une base de \mathbb{R}^n .

- 1. $v_1 = (1, 2, 1),$ $v_2 = (1, -1, 1)$ 2. $v_1 = (1, 3, 1),$ $v_2 = (-1, 0, 1),$ $v_3 = (2, 3, 0),$ $v_4 = (0, 1, 1)$ 3. $v_1 = (1, 1, 1),$ $v_2 = (1, 3, -1),$ $v_3 = (1, -1, 3)$ 4. $v_1 = (1, 0, 1),$ $v_2 = (2, 1, 0),$ $v_3 = (1, 1, 1)$ 5. $v_1 = (2, 0, 1, 3),$ $v_2 = (1, 1, 0, -1),$ $v_3 = (0, -2, 1, 5),$ $v_4 = (1, -3, 2, 9)$

Exercice 3

(**)

- 1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 0))$ de \mathbb{R}^2 est une base.
- 2. Trouver les coordonnées du vecteur (2,3) dans cette base (sans utiliser les matrices)
- 3. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
- 4. Calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ et en déduire les coordonnées dans la base \mathcal{B} du vecteur (4,-1).



 $(\star\star)$ Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 les familles de \mathbb{R}^3 définies par :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$$
 et $\mathcal{B}_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)).$

- 1. Vérifier que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de \mathbb{R}^3 .
- 2. Donner la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B}_1 , puis la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base canonique \mathcal{C} .
- 3. Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 .
- 4. Exprimer le premier vecteur de la base \mathcal{B}_2 comme combinaison linéaire des vecteurs de la base \mathcal{B}_1 .

Exercice 5

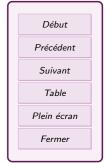
 $(\star\star)$ Dans \mathbb{R}^2 , soient $\overrightarrow{u}=(1,3), \overrightarrow{v}=(-5,2)$ et $F=\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\})$. Montrer que $X=(-7,13)\in F$.

Exercice 6

 $(\star \star \star)$ Soit X un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et $D = \text{Vect}(\{X\})$ la droite vectorielle engendrée par X. Montrer que $\mathcal{F}' = \{2X\}$ est aussi une famille génératrice de D.

Exercice 7

(*) Soient u = (1, 1, 1) et v = (0, 0, 1) deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pour que $(x, y, z) \in \text{Vect}(\{u, v\})$.



 $(\star\star)$ Dans l'espace \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 3, 2, 4), v_3 = (2, 1, 4, 0), v_4 = (3, 0, 2, 3), v_5 = (2, 0, 0, 1).$$

Le but de l'exercice est de construire une base de \mathbb{R}^4 à l'aide de ces vecteurs.

- 1. Montrer que la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ engendre \mathbb{R}^4 . Est-ce une famille libre ?
- 2. Extraire de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ une base de \mathbb{R}^4 .
- 3. Exprimer le vecteur restant comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Exercice 9

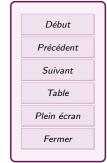
 $(\star\star)$ Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'ensemble F des vecteurs (x,y,z) tel que

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3,$ en donner une base et sa dimension.

Exercice 10

 $(\star\star)$ Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs u=(1,1,1,1) et v=(1,2,1,-3). Donner un système d'équations qui caractérise F.



 $(\star\star)$ Soit une famille de vecteurs $\overline{\mathcal{F}(u,v,w,z)}$ génératrice de \mathbb{R}^3 .

- 1. Cette famille peut-elle être une base de \mathbb{R}^3 ?
- 2. On suppose que z est une combinaison linéaire de (u, v, w). Prouver que la famille $\mathcal{F}'(u, v, w)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 . Que peut-on en conclure?

Exercice 12

 $(\star\star)$ Donner la dimension du sous-espace vectoriel (de \mathbb{R}^3 (1.) ou \mathbb{R}^4 (2.)) engendré par les familles composées des vecteurs suivants.

- 1. $u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1)$
- 2. $u_1 = (1, 0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 1, 0, 0), \quad u_3 = (-1, -1, 1, 0), \quad u_4 = (0, 0, 2, 0).$

Exercice 13

 $(\star\star)$ Soit P le plan de \mathbb{R}^3 d'équation x+y-z=0. Soit D la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par u=(2,0,1). Montrer que D et P sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 , et donner la décomposition de $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sur $D\oplus P$.

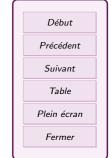


Table des matières

1	Familles de vecteurs de \mathbb{R}^n		1
	1.1	Familles libres	2
	1.2	Familles génératrices	3
	1.3	Bases de vecteurs	4
	1.4	Matrices de passage	5
2	Sous-espace vectoriels dans \mathbb{R}^n		11
	2.1	Définition	11
	2.2	sous-espace engendré par une famille de vecteurs	12
	2.3	Sous-espace vectoriel défini par des équations	13
	2.4	Famille génératrice et système d'équations	15
3	Base d'un sous-espace vectoriel		18
	3.1	Existence de base et dimension	18
	3.2	Intersection de sous-espaces vectoriels	21
	3.3	Somme de deux sous-espaces vectoriels	21
1	TD	13 Vectours de \mathbb{R}^n	22

