# 32. Compléments sur les équations différentielles



## 1. équations différentielles linéaires

### 1.1. Ce qu'on sait déjà résoudre

Equation linéaire du premier ordre.

$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x)$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = y_p(x) + \lambda \exp(-A(x))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A$ une primitive de $a$ et $y_p$ une solution particulière de l'équation. On détermine la valeur de la constante $\lambda$ grâce à une condition initiale.

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants.

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = d(x)$$

avec $a, b, c$ des constantes. On résout l'équation homogène grâce à l'équation caractéristique et on cherche une solution particulière avec une forme particulière selon l'expression de $d(x)$.

### 1.2. équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a,\ b,\ c$ et $d$ quatre fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que la fonction $a$ ne s'annule pas sur $I$. L'équation différentielle

$$(E): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et l'équation

$$(H): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

est l'équation homogène qui lui est associée.

**Théorème 1.**

L'ensemble $S_H$ des solutions de $(H)$ sur $I$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2. Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions non colinéaires de l'équation homogène sur $I$, les solutions de $(H)$ sur $I$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\forall x \in I,\ y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{K}^2$$

Les solutions de $(E)$ sur $I$ sont toutes les fonctions de la forme $\forall x \in I,\ y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, où $y_p$ est une solution particulière de $(E)$.

De plus, pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution sur $I$.

Résolution dans le cas où l'on connaît une solution de $(H)$

On veut résoudre l'équation différentielle $(E)$ : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ sur un intervalle $I$.

1. On détermine une solution $f$ de l'équation homogène $(H)$ qui ne s'annule pas sur $I$ (suggestion de l'énoncé, solution évidente....)
2. On pose $y = u \times f$, avec $u$ une fonction deux fois dérivable sur $I$ qu'on doit déterminer. La fonction $y$ est deux fois dérivable sur $I$ et on calcule les dérivées $y' = u'f + uf'$ et $y'' = u''f + 2u'f' + uf''$.

3. On reporte dans l'équation :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = d &\Longleftrightarrow a(u''f + 2u'f' + uf'') + b(u'f + uf') + c(uf) = d \\ &\Longleftrightarrow u\underbrace{(af'' + bf' + cf)}_{=0} + (af)\ u'' + (2af' + b)\ u' = d \\ &\Longleftrightarrow (af)\ u'' + (2af' + b)\ u' = d. \end{aligned}$$

4. On posant $z = u'$ ; on est ramené à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E_2) \quad (af)\ z' + (2af' + b)\ z = d.$$

5. On résout $(E_2)$ pour trouver $z$, on en déduit $u$ (car $z = u'$, ne pas oublier les constantes d'intégration !) , puis $y$ (car $y = u \times f$).

**Exemple.** Résoudre $(E)$ : $x^2y'' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en remarquant que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est une solution particulière de $(E)$ sur cet intervalle.

## 1.3. Systèmes linéaires à coefficients constants



**Définition 2.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle système linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants le système

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ y_2' = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases}$$

où $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est un $n-$uplet de fonctions réelles inconnues définies sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$, le système $(S)$ s'écrit

$$Y' = AY.$$

**Exemple.** Le système $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z \end{cases}$ peut s'écrire $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**Théorème 3.**

L'ensemble des solutions sur $I$ d'un tel système $(S)$ est un espace vectoriel de dimension $n$. Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $n-$uplet $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ solution de $(S)$ vérifiant $(y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.



Résolution dans le cas où $A$ est diagonalisable On considère toujours le système $(S)$ de la définition 1, qu'on met sous la forme $Y' = AY$.
On diagonalise la matrice $A$ (si elle est diagonalisable !) : il existe une matrice inversible $P$ (formée des vecteurs colonnes propres de $A$) et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un $n-$uplet de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. On a alors :

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = D(P^{-1}Y).$$

On pose $U = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ comme combinaisons linéaires des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et l'on a par linéarité de la dérivation :

$$U' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = P^{-1}Y'$$

On a alors

$$Y' = AY \iff U' = DU \iff \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \\ u_n' = \lambda_n u_n \end{cases}$$

$$\iff \exists (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in I,\ (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = (k_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, k_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \dots, k_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t}).$$

Pour obtenir $Y$, et donc les solutions de $(S)$, on utilise $Y = PU$. On remarque qu'il est absolument inutile de calculer $P^{-1}$ !

**Exemple.** Résoudre le système $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z. \end{cases}$

## 1.4. Autres exemples de méthodes de résolution

Changement de fonction (ou d'inconnue) En changeant la fonction inconnue $y$, on peut essayer de se ramener à une équation qu'on sait résoudre.

**Exercice 1**

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$.

Changement de variable On changeant la variable, on peut essayer de se ramener à une équation qu'on sait résoudre. Mais attention, ça nécessite de changer aussi de fonction inconnue car on ne peut pas avoir les deux variables dans la même équation !

**Exemple.** Résoudre $x^2y'' - 2xy' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.



# 2. équation différentielles non linéaires d'ordre 1

Il n'y a plus de méthodes "universelles" dès que l'équation n'est plus linéaire. On va étudier quelques types d'équation où on peut trouver des solutions. Mais il y a de nombreuses équations différentielles dont on ne peut pas trouver de solution !

## 2.1. équations différentielles à variables séparables

**Définition 4.**

On appelle équation différentielle à variables séparables toute équation différentielle du premier ordre qui s'écrit

$$a(y)y' = b(x) \tag{E}$$

où $a$ et $b$ sont deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles ouverts respectifs $J$ et $I$.

**Remarque :** Si le second membre $b(x)$ est une fonction constante, on parle d'équation incomplète (mais à variables séparables tout de même).

**Exemple.** L'équation différentielle $\dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$ est une équation à variables séparables.

**Technique.** Supposons que $a$ ne s'annule pas sur $J$. Nous allons "intégrer" de chaque coté de l'équation. $y' \times a(y) = b(x)$.
$y' \times a(y)$ a pour primitive $A(y)$ avec $A$ une primitive de la fonction $a$. Notons $B$ une primitive de la fonction $b$, on obtient alors

$$A(y) = B(x) + \lambda$$

C'est une équation confinant $y$, qu'on voudrait pouvoir isoler.

**Remarque :** A la "physicienne", on remplace le $y'$ par $dy/dx$ et on passe $dx$ de l'autre coté, ce qui fait $a(y)dy = b(x)dx$, puis on intègre. Et on obtient le même résultat.

La fonction $a$ ne s'annulant pas, elle est de signe constant et donc sa primitive $A$ est strictement monotone. Comme $A$ est de plus continue sur $J$, elle réalise une bijection. En notant $A^{-1}$ la bijection réciproque de $A$, on obtient $y(x) = A^{-1}(B(x) + \lambda)$.
Mais il n'est pas toujours possible d'obtenir $y$ de façon explicite (par exemple lorsque $A^{-1}$ ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles). On dit alors que l'on obtient une solution implicite de l'équation différentielle.

**Exemple.** Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.



## 2.2. équations de Bernoulli

**Définition 5.**

On appelle équation différentielle de Bernouilli toute équation différentielle de la forme

$$(E_\alpha) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

où $a$ et $b$ sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Remarque :** On a exclu les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels on a affaire à une équation linéaire qu'on sait résoudre.

**Technique.** On cherche ici les solutions $y$ qui ne s'annulent pas sur $I$ (et même les solutions strictement positives sur $I$ si $\alpha$ n'est pas un entier).

1. On divise toute l'équation par $y^\alpha$, on obtient :

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

2. On pose $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$. La dérivée de $z$ est alors $z' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$. On remplace dans l'équation
$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x)$$
On obtient donc une équation linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre.

**Exemple.** Chercher les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante (qui apparaît lorsque l'on étudie la chute d'une masse dans un liquide) où $a$ et $b$ désignent deux constantes réelles strictement positives :
$$(E) \qquad y' - 2ay + by^2 = 0.$$



## 2.3. équations de Ricatti

**Définition 6.**

On appelle équation différentielle de Ricatti toute équation différentielle de la forme
$$(E) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$
où $a$, $b$ et $c$ sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Technique.**

1. On détermine une solution particulière $y_p$ de $(E)$ (suggestion de l'énoncé, solution évidente...)
2. On cherche $z$ une fonction dérivable sur $I$ telle que $y = y_p + z$. On a alors en dérivant $y' = y_p' + z'$. On reporte dans l'équation $(E)$.
3. On doit pouvoir simplifier $y_p'$ au cours du calcul et on obtient une équation de la forme
$$(E') \qquad z' = d(x)z + e(x)z^2$$
qui est une équation de Bernoulli d'inconnue $z$.

4. On résout $(E')$ avec la méthode des équations de Bernoulli pour trouver $z$, puis on en déduit $y$.

# 3. TD 32 Equation différentielles



**Exercice 1**

($\star\star$) Résoudre $(E)$ : $y" - 2xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant que la fonction $f : x \to e^{x^2}$ est une solution particulière de $(E)$. On notera $\phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

**Exercice 2**

($\star\star$) Résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' & = 4x & -3y & +2z \\ y' & = 6x & -5y & +4z \\ z' & = 4x & -4y & +4z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 3, y(0) = 5$ et $z(0) = 3$.

**Exercice 3**

($\star\star$) Chercher la solution de l'équation à variables séparables

$$y' + (1 - \frac{3}{t^4})e^y = 0, \qquad y(1) = 3.$$

**Exercice 4**

($\star\star$) En posant $u = \frac{y}{t}$, résoudre les équations différentielles homogènes

$$(E_1) : y' = \frac{t^2 + y^2}{ty} \qquad \text{et} \quad (E_2) : tyy' = y^2 - t^2$$

.

**Exercice 5**

($\star\star$) Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli

$$y' = y^3 - \frac{y}{t}.$$

**Exercice 6**

($\star\star$) Étudier l'équation différentielle de Bernoulli $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute solution explose en un temps fini.

**Exercice 7**

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation de Ricatti :

$$y' = (y-1)(ty - y - t)$$

**Exercice 8**

($\star\star$) Résoudre

$$y = ty' - \frac{y'^2}{4}$$

Indication de méthode : On posera $p = y'$ dans le second membre de l'équation, puis on dérivera l'équation.

## Exercice 9

($\star\star$) **La courbe du chien.** On se place dans le plan muni d'une b.o.n.d $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un maître et son chien. A l'instant $t = 0$, le maître part du point $O$ et parcourt la demi-droite $[Oy)$ à la vitesse constante $v$. Au même moment, le chien part du point de coordonnées $(x_0, 0)$ et il court constamment vers son maître à la vitesse 2v.
On note $(x(t), y(t))$ la position du chien à tout instant et on s'intéresse à la courbe de la course du chien, c'est à dire qu'on veut exprimer $y$ en fonction de $x$. On admet que la fonction $y : x \to y(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad 4x^2(y")^2 - (y')^2 = 1$$

1. Chercher deux solutions particulières $y_1$ et $y_2$ de l'équation homogènes $H$ : $4x^2(y")^2 - (y')^2 = 0$. Indication : utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2$.
2. Chercher des solutions de $(E)$ sous sous la forme $y = ay_1 + by_2 + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes et $b$ qu'on exprimera en fonction de $a$ et $c$.
3. Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.
4. En déduire la position du chien quand il rattrape son maître.

# Table des matières

**1 équations différentielles linéaires** **1**
1.1 Ce qu'on sait déjà résoudre . . . . . 1
1.2 équations différentielles linéaires d'ordre 2 . . . . . 1
1.3 Systèmes linéaires à coefficients constants . . . . . 4
1.4 Autres exemples de méthodes de résolution . . . . . 6

**2 équation différentielles non linéaires d'ordre 1** **7**
2.1 équations différentielles à variables séparables . . . . . 7
2.2 équations de Bernoulli . . . . . 8
2.3 équations de Ricatti . . . . . 9

**3 TD 32 Equation différentielles** **11**