### 33. Séries entières

# 1. Séries entières d'une variable complexe

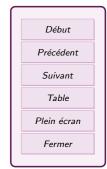
# Définition 1.

Pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  et tout  $r \geq 0$ , on note  $D(z_0, r)$  le disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon r et  $\overline{D}(z_0, r)$  le disque fermé correspondant :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$$
 et  $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \le r\}$ .

On note  $C(z_0, r)$  le cercle de centre  $z_0$  et de rayon r:

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}.$$



# 1.1. Définition et rayon de convergence

# Définition 2.

Soit  $z_0$  un nombre complexe. Une série entière centrée en  $z_0$  est une série de fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  notée  $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ . Les complexes  $a_n$  s'appellent les coefficients de la série entière.

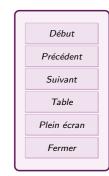
En notant 
$$\mathcal{D} = \{z \in E, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n (z-z_0)^n \text{ converge} \}, \text{ la }$$

(fonction somme) de la série entière est la fonction

$$S: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$$
  
 $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$ 

# Remarque:

- Les fonctions polynômes sont des cas particuliers de fonctions sommes de séries entières, la suite des coefficients étant nulle à partir d'un certain rang.
- Le but ici est de déterminer le domaine de définition de cette série entière, c'està-dire l'ensemble des complexes z tels que la série  $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$  converge, et d'étudier les propriétés de la fonction somme.
- Pour simplifier, on considérera souvent dans ce chapitre des séries entières centrées en 0, c'est-à-dire de la forme  $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ . Les résultats restent valables pour les séries centrées en  $z_0$ , en posant  $Z = (z z_0)$ .



# Définition 3.

Soit  $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$  une série entière. L'ensemble des réels positifs r tels que

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \text{ converge est un intervalle de la forme } \left( [0, R[ \text{ ou } [0, R] \right) \right)$$
 (où

 $R \in \mathbb{R}^+$  ou  $R = +\infty$ ). Ce nombre R est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ .

# Exemples.

1. Soit  $P = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$  un polynôme à coefficients complexe. Comme la somme

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_k| r^k = \sum_{0}^{N} |a_k| r^k$$

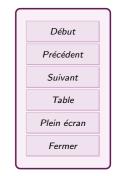
est finie pour tout tout  $r \in \mathbb{R}^+$ , la série converge pour  $r \in \mathbb{R}^+$ . Donc le rayon de convergence est  $+\infty$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = 1$ . La série entière centrée en 0 est  $\sum_{n \ge 0} z^n$ . Soit  $r \in \mathbb{R}^+$ , on étudie la convergence de la série :

$$S_N(r) = \sum_{0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \left\{ \begin{array}{l} \to \frac{1}{1 - r} & \text{si } r < 1\\ \to +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \end{array} \right.$$

Donc la série converge si et seulement si  $r \in [0, 1[$ . Donc le rayon de convergence de la série entière est R = 1.

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \frac{1}{n!}$ , donc la série est  $\sum_{n \ge 0} \frac{z^n}{n!}$ . Soit  $r \in \mathbb{R}^+$ , on étudie



la convergence de la série  $\sum_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{n!}$ . On a

$$\frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \frac{r}{n+1} \to 0 < 1$$

donc, par critère de d'Alembert, la série converge pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ . Donc le rayon de convergence de cette série est  $R = +\infty$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = n!$  et on étudie  $\sum_{n \geqslant 0} n! z^n$ . Soit  $r \in \mathbb{R}^+$ , on étudie la convergence de la série  $\sum_{n \geqslant 0} n! r^n$ :

$$\frac{r^{n+1}(n+1)!}{r^n n!} = r(n+1) \to \infty$$

si  $r \neq 0$ , donc la série diverge pour tout  $r \in \mathbb{R}^{*+}$ . Donc le rayon de convergence de cette série est R = 0.

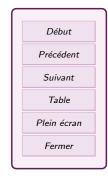
# Propriété 4.

Soit  $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence R>0.

- Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que |z| < R, la série  $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$  converge absolument.
- Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que |z| > R, la série  $\sum_{n \ge 0} a_n z^n$  diverge.

Si R est un réel strictement positif, le disque ouvert D(0,R) est appelé le disque de convergence de la série entière  $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$ .

**Remarque :** Pour |z|=R, c'est à dire sur le cercle  $\mathcal{C}(0,R)$ , tout peut arriver. Exemple.



# Exercice 1

Soit  $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$  une série entière de rayon de convergence 2. Les séries numériques suivantes convergent-elles ?

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n 3^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n (-2)^n$$

# 1.2. La règle de D'Alembert pour les séries entières

# Théorème 5.

Soit  $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$  une série entière dont les coefficients  $a_n$  sont tous non nuls.

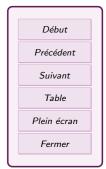
Si la suite  $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$  admet une limite  $\ell$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , alors le rayon de conver-

gence R de la série entière  $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$  est donné par  $R=\frac{1}{\ell}$  (avec la conven-

tion 
$$\frac{1}{+\infty} = 0$$
 et  $\frac{1}{0} = +\infty$ ).

**Démonstration.** On étudie la convergence de  $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$  pour  $r\in \mathbb{R}^+$ . Pour  $r\neq 0$ , on a une série à terme strictement positif et

$$\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ donc } \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r\ell$$



Par la règle de d'Alembert des série, on a donc convergence si  $r\ell < 1$ , c'est à dire  $r < \frac{1}{\ell}$  et divergence si  $r\ell > 1$ , c'est à dire  $r > \frac{1}{\ell}$ . Donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{\ell}$ .

Remarque : La règle de D'Alembert peut être appliquée avec une série entière dont tous les coefficients sont tous non nuls au delà d'un certain rang.

Exemple. Calculer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{n}z^n$ .

# 1.3. Opérations sur les séries entières

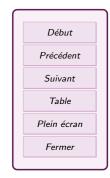
Propriété 6.

# Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$ On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n)z^n$ de rayon de convergence $R_{a+b}$ . Pour tout $z\in \mathcal{D}\big(0,\min(R_a,R_b)\big)$ , $\sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n)z^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

De plus, si  $R_a \neq R_b$  alors  $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$ .

**Remarque :** Si  $R_a = R_b$  le rayon de convergence  $R_{a+b}$  peut être supérieur au min $(R_a, R_b)$ .



# Propriété 7.

Soient  $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$  une série entière dont on note  $R_a$  le rayon de convergence et

 $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$  est égal à  $R_a$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Si  $\lambda=0$  alors la série entière  $\sum_{n\geqslant 0}\lambda a_nz^n$  a un rayon de convergence infini et vaut 0 en tout point.

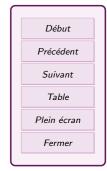
# Exercice 2

Soit  $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$  une série entière de rayon de convergence 2, et  $\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$  une série entière de rayon de convergence 3. Que peut-on dire sur le rayon de convergence de  $\sum_{n\geqslant 0}(a_n-b_n)z^n$ ?

# 2. Série entière d'une variable réelle

Soit  $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$  une série entière d'une variable réelle x de rayon de convergence R>

0. Le rayon de convergence de cette série entière est défini de la même manière que précédemment, mais on parle maintenant d'intervalle de convergence. Cet intervalle de convergence peut être [-R,R],[-R,R[,]-R,R] ou ]-R,R[ suivant que la série entière converge ou non en R et -R.



# 2.1. Continuité - dérivabilité

# Théorème 8.

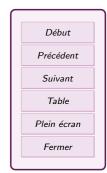
Soit  $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence R>0 dont on note

S la fonction somme.

- 1. La fonction S est continue sur l'intervalle ]-R,R[.
- 2. Si la série  $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$  converge alors la fonction S est continue en R.
- 3. Si  $\sum_{n\geq 0} a_n (-R)^n$  converge alors la fonction S est continue en -R.
- 4. La fonction somme S est dérivable sur ]-R,R[, sa dérivée a aussi pour rayon de convergence R et pour tout  $x \in ]-R,R[$ , on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$
 (on dérive la série entière terme à terme).

**Remarque :** La série entière dérivée s'écrit aussi :  $\sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n$ .



### Corollaire 9.

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence R>0 dont on note

S la fonction somme. La fonction S est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur ]-R,R[ et pour tout  $k\in\mathbb{N}$  et tout  $x\in]-R,R[$ , on a

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $S^{(k)}(0) = k!a_k$ .

# Exemple.

# 2.2. Intégration

#### Théorème 10.

Soit  $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence R>0 dont on note

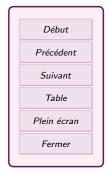
S la fonction somme. Sur ]-R,R[, une primitive de la fonction S est la fonction somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} \, x^{n+1}$$

Cette série a aussi pour rayon de convergence R

**Remarque :** On peut donc écrire que pour tout  $x \in ]-R,R[$ , on a

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$



ce qui signifie qu'on peut intégrer la série entière terme à terme.

# Exemple.

#### Exercice 3

Soit la série entière

$$s(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4n}{6n^2 - 1} x^n$$

de rayon de convergence 1.

- 1. Calculer la série entière dérivée s' et une série entière S primitive de s.
- 2. Quel est le rayon de convergence de s' et de S?

# Début Précédent Suivant Table Plein écran Fermer

# 3. Développements en séries entières

# 3.1. Fonctions développables en série entière

# Définition 11.

Une fonction f définie sur un intervalle ]-r,r[ (avec r>0) est dite développable en série entière sur ]-r,r[ s'il existe une série entière  $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$  de rayon de convergence  $R\geqslant r$  telle que :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple.

# 3.2. Unicité et écriture du développement en série entière d'une fonction

#### Théorème 12.

Soit f une fonction réelle développable en série entière sur ]-r,r[ (avec r>0) et  $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$  une série entière de rayon de convergence  $R\geqslant r$  telle que

l'on ait:

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

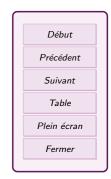
La fonction f est de classe  $C^{\infty}$  sur ]-r,r[ et les coefficients  $a_n$  sont uniques et déterminés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Démonstration.** On a vu précédemment que la fonction somme S de la série entière qui coı̈ncide avec f sur ]-r,r[ est de classe  $C^{\infty}$  sur ]-r,r[ et l'on a pour tout  $n\in\mathbb{N},$   $f^{(n)}(0)=S^{(n)}(0)=n!a_n.$  Ceci donne pour tout  $n\in\mathbb{N},$   $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$ 

**Remarque :** Si f est développable en série entière sur ]-r,r[, la valeur des coefficients  $a_n$  montre que l'on obtient un développement limité de f en 0 à n'importe quel ordre en tronquant le développement en série entière de f.

Attention Ce n'est pas parce qu'une fonction est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur ]-r,r[ qu'elle est développable en série entière sur ]-r,r[.



#### Corollaire 13.

Soit f une fonction développable en série entière sur ]-r,r[ et  $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$  la série entière telle que :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- 1. Si f est paire alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_{2n+1} = 0$ . (ie les coefficients devant les monômes de degré impair sont tous nuls).
- 2. Si f est impaire, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n} = 0$ . (ie les coefficients devant les monômes de degré pair sont tous nuls).

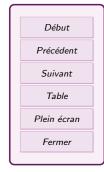
# 3.3. Opérations sur les fonctions développables en série entières

### Théorème 14.

L'ensemble des fonctions développables en série entière sur ]-r, r[ est un sousespace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur ]-r, r[. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions développables en série entière sur ]-r, r[et  $\lambda$  un réel, alors  $f + \lambda g$  est développable en série entière sur ]-r, r[.

# Propriété 15.

Soit f une fonction réelle définie sur ]-r,r[. Si f est développable en série entière sur ]-r,r[, alors les dérivées à tout ordre de f et les primitives successives de f sont développables en série entière sur ]-r,r[.



# 3.4. Développements en série entière usuels

On a déjà vu :

Pour tout 
$$x \in ]-1,1[$$
, on a  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  et  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ 

Par conséquent,

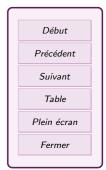
$$\forall x \in ]-1,1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

On a vu en début de chapitre que la série entière  $\sum \frac{x^n}{n!}$  avait un rayon de convergence infini. De plus la fonction S définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  est dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Ainsi, la fonction S ainsi définie, est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle du premier ordre y'-y=0 telle que y(0)=1 et donc  $S=\exp$ . On en déduit :

pour tout 
$$x \in \mathbb{R}$$
, on a  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .



Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , donc par combinaison linéaire,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n + (-x)^n}{n!}}_{\text{terme nul pour } n \text{ impair}} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

En écrivant que  $\operatorname{sh}(x) = \frac{\operatorname{e}^x - \operatorname{e}^{-x}}{2}$ , on obtient de même que  $\operatorname{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ 

On retient:

pour tout 
$$x \in \mathbb{R}$$
, on a  $\operatorname{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$  et  $\operatorname{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ .

# Exercice 4

Donner le développement en série entière de la fonction

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1-x}$$

ainsi que son rayon de convergence.

Avec une équation différentielle On veut déterminer le développement en série entière de sin autour de 0.

- 1) La fonction  $f(x) = \sin x$  est solution de l'équation différentielle y'' + y = 0, c'est à dire y = -y''. C'est la seule solution vérifiant les conditions initiales y(0) = 0 et y'(0) = 1.
- 2) On s'intéresse à la série entière

$$\sum_{p\geqslant 0} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on étudie la convergence absolue, c'est à dire la convergence de  $S = \sum_{p \geqslant 0} \frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$ . On pose

$$S = \sum_{n \ge 0} u_n$$
, avec  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$ 

Alors  $u_n \leq \frac{|x|^n}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or la série  $\sum_{p \geq 0} \frac{|x|}{n!}$  converge (vers  $e^{|x|}$ ). Donc par comparaison, S est convergente. Donc la série  $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$  est absolument convergente pour tout réel x.

Donc le rayon de convergence de la série est  $+\infty$  et la série entière est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ . On note sa somme, pour tout x réel

$$g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

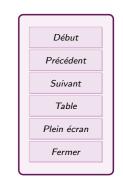
3) On peut dériver g terme à terme et on a

$$g'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}; \quad g''(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (k=p-1)$$

On remarque que g''=-g, donc g est aussi une solution de l'équation différentielle y''+y=0. De plus

$$g(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{0^{2p+1}}{(2p+1)!} = 0$$

et  $g'(0) = (-1)^0 \frac{0^0}{0!} = 1$ . Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy,  $g = \sin \pi$  sur  $\mathbb{R}$ .



On obtient donc que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ . La fonction cos étant la dérivée de sin, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ . On retient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

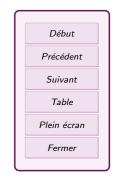
La même méthode permet de prouver que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, 1[, \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n}.$$

**Remarque :** pour n = 0 la formule  $\frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$  vaut 1.

Pour 
$$\alpha = -1$$
, on obtient  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} x^n$  c'est-à-dire :  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ .

Si  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ , on obtient la formule du binôme de Newton :  $(1+x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .



# 4. Exponentielle complexe et fonctions associées

#### Définition 16.

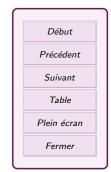
La série entière  $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$  de la variable complexe z a un rayon de convergence infini. L'application  $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  est ap $z \longmapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$ pelée (exponentielle complexe).

# Remarque:

- 1. Lorsque z est un nombre réel, on retrouve bien la fonction exponentielle réelle.
- 2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a d'après ce qui précède :

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

donc on retrouve bien la formule  $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ .



# 5. TD 33 Séries entières

# Exercice 1

 $(\star\star)$ Soit  $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence R et  $\lambda\in\mathbb{C}$ . Déterminer

le rayon de convergence de la série entière :  $\sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n z^n$ .

# Exercice 2

(★★) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) 
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!} z^n$$
 b)  $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n$  c)  $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n^2+1}{3n^3+2} z^n$ 

# Exercice 3

 $(\star\star)$  Soit  $\theta$  un nombre réel quel conque. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \qquad \text{ et } \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

# Exercice 4

 $(\star\star)$  Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

a) 
$$\sum_{n \ge 1} \left( n + \frac{1}{n} \right) x^n \qquad b) \sum_{n \ge 1} (n^2 + n) x^n$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

# Exercice 5

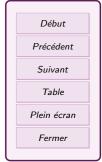
(\*\*) On considère la série entière 
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}x^n$$
 et sa somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$$

- 1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- 2. Montrer que la somme S est une solutions de l'équation différentielle xy'+y=f(x), où f est une fonction à déterminer.
- 3. Exprimer S sur ]-R,R[ à l'aide de fonctions usuelles.
- 4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ .

# Exercice 6

 $(\star\star)$  En résolvant une équation différentielle, retrouver le développement en série entière autour de 0 de la fonction  $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$  où  $\alpha$  est un réel quelconque.



# Table des matières

1	Séries entières d'une variable complexe		1
	1.1 Définition et rayon de convergence		2
	1.2 La règle de D'Alembert pour les séries entières		5
	1.3 Opérations sur les séries entières		6
2	Série entière d'une variable réelle		7
	2.1 Continuité - dérivabilité		8
	2.2 Intégration		9
3	Développements en séries entières		10
	3.1 Fonctions développables en série entière		10
	3.2 Unicité et écriture du développement en série entière d'une fonc	tion	11
	3.3 Opérations sur les fonctions développables en série entières		12
	3.4 Développements en série entière usuels		13
4	4 Exponentielle complexe et fonctions associées		17
5	5 TD 33 Séries entières		18

