Révisions

Les bases (2)

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan. Quel outil de calcul utiliser étudier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Réponse 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Question 2

Quel outil de calcul utiliser pour étudier si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?

Réponse 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux quand $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Question 3

Quel outil de calcul utiliser pour étudier si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires dans l'espace ?

Réponse 3

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires quand $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Question 4

Quelle est la technique de base pour établir l'équation d'un ensemble $\mathcal{A}$ dans le plan ou l'espace ?

Réponse 4

On pose un point M ((x, y) dans le plan, (x, y, z) dans l'espace). On dit $M \in \mathcal{A}$ et on exploite les propriétés de M.

Question 5

Dans le plan, soit $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A et dirigé par le vecteur $\vec{u}$. Comment établir une équation de $\mathcal{D}$?

Réponse 5

On pose $M(x, y)$. M appartient à la droite $\mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ et on calcule avec les coordonnées.

Question 6

Dans le plan, soit $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. Comment établir une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ en un calcul ?

Réponse 6

On pose $M(x, y)$. M appartient à la droite $\mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ et on calcule avec les coordonnées.

Question 7

Comment établir l'équation cartésienne d'un cercle de centre A et de rayon R dans le plan ?

Réponse 7

Soit $M(x, y)$. M est sur le cercle $\Leftrightarrow AM = R$ distance. On utilise les coordonnées pour exprimer la distance AM, on met au carré le tout et on développe. A la fin, on a une équation du type $x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$.

Question 8

Mettre l'expression $x^2 + ax$ sous forme canonique.

Réponse 8

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Question 9

A partir de l'équation $x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$ dans le plan comment savoir si la figure est un cercle, son centre et son rayon ?

Réponse 9

On utilise la forme canonique pour x et pour y, et on regroupe les constantes à droite. On obtient une expression $(x+\alpha)^2 + (Y+\beta)^2 = \gamma$. Si $\gamma > 0$, c'est un cercle. On met une racine carré, alors le point $(-\alpha, -\beta)$ est le centre du cercle et $\sqrt{\gamma}$ le rayon.

Question 10

Quel outil de calcul utiliser pour trouver l'intersection de plusieurs figures géométriques ?

Réponse 10

Un système avec les équations des figures.

Question 11

Comment établir l'équation cartésienne d'un plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace ?

Réponse 11

On pose $M(x, y, z)$. On dit que M appartient au plan si$\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires, donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Et on calcule avec les coordonnées

Question 12

Comment établir l'équation cartésienne d'un plan passant par un point A et orthogonal au vecteur $\vec{n}$ dans l'espace ?

Réponse 12

On pose $M(x, y, z)$. On dit que M appartient au plan si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Et on calcule avec les coordonnées

Question 13

Comment établir l'équation cartésienne de la sphère de centre A et de rayon R dans l'espace ?

Réponse 13

On pose $M(x, y, z)$. M appartient à la sphère $\Leftrightarrow AM = R$. On met au carré et on utilise les coordonnées pour développer l'expression.

Question 14

$$n! =$$

Réponse 14

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Question 15

$$\binom{n}{p} =$$

Réponse 15

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Question 16

Comment calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal ?

Réponse 16

On fait une sorte de tableau : en colonne les valeur de n de 0 à ... et en ligne les valeurs de p de 0 à .... Ensuite on remplit le tableau : Première colonne et diagonale = que le chiffre 1. Au-dessus de la diagonale = rien. Ensuite, sur une ligne, on addition deux termes consécutifs et on met le résultat dans la case sous le deuxième terme.

Question 17

Donner la méthode permettant de calculer $(x+y)^n$ quand n est petit.

Réponse 17

On fait le triangle de Pascal jusqu'à la ligne n. On prend les coefficients de cette ligne et on les écrit dans l'ordre, en séparant par des $+$. Après on écrit les puissances de x dans l'ordre de 0 à n, une par coefficient. Puis les puissances de y dans l'ordre inverse de n à 0, une par coefficient.

Question 18

C'est quoi $\arcsin y$?

Réponse 18

$\arcsin y$ est l'unique angle x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut y ($\sin x = y$)

Question 19

$$\arcsin'(y) = ?$$

Réponse 19

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Question 20

C'est quoi $\arccos y$?

Réponse 20

$\arccos y$ est l'unique angle x de l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut y ($\cos x = y$)

Question 21

$$\arccos'(y) = ?$$

Réponse 21

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Question 22

C'est quoi $\arctan y$?

Réponse 22

$\arctan y$ est l'unique angle x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut y ($\tan x = y$).

Question 23

$$\arctan' x = ?$$

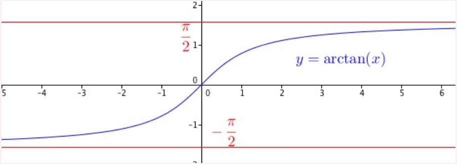
Réponse 23

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Question 24

Donner l'allure du graphe de arctan

Réponse 24



Question 25

Dans $\mathbb{C}$, que vaut i^2 ?

Réponse 25

$$-1$$

Question 26

Un nombre complexe z peut s'écrire de trois formes différentes. Donner le nom de chacune des formes et son allure.

Réponse 26

Forme algébrique $z = a + ib$. Forme trigonométrique $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.

Question 27

Dans l'écriture d'un complexe $z = a + ib$, comment s'appellent a et b et de quel type de nombre sont-il ?

Prec Suit

Réponse 27

a et b sont des réels. a est la partie réelle de z ($\Re e(z)$) et b sa partie imaginaire ($\operatorname{Im} m(z)$).

Question 28

Dans l'écriture d'un complexe $z = \rho e^{i\theta}$ ou $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, que sont ρ et θ ? Quel type de nombre ?

Prec *Suit*

Réponse 28

ρ est un réel positif et θ un réel. ρ est le module de z et θ un argument de z.

Question 29

Le module de $z = a + ib$

Réponse 29

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Question 30

On a $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$. Que représentent z, a, b, ρ et θ dans le plan complexe ?

Réponse 30

z est l'affixe du point M de coordonnée (a, b). a est l'abscisse et b l'ordonnée de M. ρ est la longueur OM et θ une mesure de l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Question 31

Comment trouver la forme algébrique de $\frac{1}{a+ib}$?

Réponse 31

On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur : $\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}$.

Question 32

Si $z = a + ib$, donner les formules permettant de calculer ρ et θ

Réponse 32

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\theta = \frac{a}{\rho},\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}.$$

Question 33

Si $z = \rho e^{i\theta}$, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Réponse 33

$$\Re e(z) = \rho \cos\theta \text{ et } \operatorname{Im} m(z) = \rho \sin\theta$$

Question 34

$$\mathrm{e}^{i\theta} = ?$$

Dans le plan complexe, l'image de ce nombre se situe où ?

Réponse 34

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

son image est sur le cercle unité, à l'angle θ.

Question 35

Donner les deux formules d'Euler

Réponse 35

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Question 36

Comment linéariser une expression trigonométrique ? (en bref)

Réponse 36

On remplace les cos et sin par les formules d'Euler, on développe tout les produits et puissance. Puis on utilise les formules d'Euler pour retrouver des cos et des sin.

Question 37

$$\cos\theta + i\sin\theta = ?$$

Réponse 37

$$e^{i\theta}$$

Prec Suit

Question 38

Donner en bref les deux méthodes pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Δ ?

Réponse 38

Méthode 1. Si Δ se met sous forme exponentielle, on cherche $\delta = \rho e^{i\theta}$, qu'on reporte dans $\delta^2 = \Delta$. Puis on sépare le module et l'argument pour trouver ρ et θ. Attention, ne pas oublier les $2k\pi$!

Méthode 2. Si Δ se met sous forme algébrique, on cherche $\delta = a + ib$, qu'on reporte dans $\delta^2 = \Delta$. Puis on sépare partie réelle et imaginaire pour trouver a et b.

Question 39

Donner les solutions complexes de $az^2 + bz + c = 0$.

Réponse 39

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant

— Si $\Delta = 0$, une racine double $\frac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta \neq 0$, deux racines simples, on calcule δ une racine carré de Δ, et on a comme solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Question 40

Quel est le degré d'un polynôme et son terme dominant ?

Réponse 40

Le degré est la plus grande puissance de X et le coefficient dominant est le coefficient de cette puissance de X.

Question 41

On fait la division euclidienne de A par B, on obtient comme quotient Q et comme reste R. Quelle est la relation qui lie ces polynômes et quelle propriété a R ?

Réponse 41

$$A = BQ + R \text{ et } deg(R) < deg(B).$$

Question 42

Dire que α est une racine de P signifie quoi et quelle propriété peut-on en déduire ?

Réponse 42

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } (X - \alpha) \text{ divise } P.$$

Question 43

C'est quoi l'ordre de multiplicité d'une racine α de P ?
Quel lien avec les dérivées de P ?

Réponse 43

C'est la puissance k maximale telle que $(X-\alpha)^k$ divise P. α est une racine de P, P', P"... jusqu'à la dérivée $k-1$-ième, et $P^{(k)}$ d'admet pas α comme racine.

Question 44

Sur $\mathbb{R}[X]$, à quoi peut ressembler une factorisation d'un polynôme P

Réponse 44

$P = a(X-\alpha)^n(X-\beta)^m \cdots (X-\gamma)^p(X^2+cX+d)^q \cdots (X^2+eX+f)^r$ avec des discriminants négatifs pour les trinômes du second degré.

Question 45

Si P est un polynôme à coefficients entiers, quelles racines entières peut-on tester ?

Réponse 45

Les diviseurs du coefficient constant de P.

Question 46

Donner en bref les étapes de la décomposition en élément simples de la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$.

Réponse 46

1. On fait la division de A par B : $A = BQ + R$ ce qui permet d'écrire $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$.
2. on cherche les pôles (les racines de B) et sa factorisation.
3. on écrit $\frac{R}{B}$ comme la somme d'éléments simples du types $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$ et $\frac{cX+d}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}$ avec α les racines de B et $(X^2 + \beta X + \gamma)$ les trinômes à discriminant négatif de la factorisation de B.
4. En prenant des valeurs pour X, on calcule les coefficients des numérateurs d'éléments simples.

Question 47

Si le dénominateur d'une fraction rationnelle contient $(X-\alpha)^3$ dans sa factorisation, quels éléments simples apparaissent ?

Réponse 47

$$\frac{a}{(X-\alpha)} + \frac{b}{(X-\alpha)^2} + \frac{c}{(X-\alpha)^3}$$

Question 48

Si une fraction rationnelle se décompose $\frac{a}{(X-\alpha)} + \frac{b}{(X-\alpha)^2} + \frac{c}{(X-\alpha)^3}$, quel est le coefficient le plus simple à calculer et comment ?

Réponse 48

C'est le terme de plus haut degré, le coefficient c. On multiplie l'expression par $(X-\alpha)^3$ et on prend $X=\alpha$.

Question 49

Si le dénominateur d'une fraction rationnelle contient $(aX^2 + bX + b)^2$ avec discriminant négatif dans sa factorisation, quels éléments simples apparaissent ?

Réponse 49

$$\frac{cX+d}{(aX^2+bX+b)} + \frac{eX+f}{(aX^2+bX+b)^2}$$

Question 50

Quelle est la définition d'une base de $\mathbb{R}^n$? Par un calcul, comment vérifier qu'une famille est une base ?

Prec Suit

Réponse 50

Une base = Une famille de vecteurs libre et génératrice. Si le déterminant de la famille est non nul, c'est une base

Question 51

Si (u, v, w, x) est une base de $\mathbb{R}^4$ et les constantes (a, b, c, d) sont les coordonnées de y dans cette base, alors $y =$?

Réponse 51

$$y = au + bv + cw + dx$$

Question 52

On a $\mathcal{B}(u, v, w, x)$ une base de $\mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comment noter et construire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$?

Réponse 52

On met les coordonnées canoniques des vecteurs u, v, w, x en colonnes, côte à côte, et ça fait la matrice $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

Question 53

Soient X un vecteur, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ deux bases. On note $X_{\mathcal{C}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{C}$ et $X_{\mathcal{B}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{B}$. Donner les formules permettant de passer de $X_{\mathcal{C}}$ à $X_{\mathcal{B}}$ et inversement.

Réponse 53

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) X_{\mathcal{B}}$$
$$X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1} X_{\mathcal{C}}.$$

Question 54

C'est quoi $\mathrm{Vect}(u, v, w)$? Que contient-il ?

Réponse 54

C'est l'espace vectoriel engendré par la famille (u, v, w). Il contient tous les vecteurs $X = au + bv + cw$ avec a, b, c des constantes.

Question 55

Quelle est la définition de la dimension d' un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Réponse 55

C'est le nombre de vecteurs dans une base de F.

Question 56

C'est quoi la primitive d'une fonction f ?

Réponse 56

fonction dérivable F vérifiant $F' = f$.

Question 57

C'est quoi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

Réponse 57

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f sur $[a, b]$.

Question 58

Donner F l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Réponse 58

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Question 59

Donner une primitive de x^k avec $k \neq -1$

Réponse 59

$$\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Question 60

Donner une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$

Réponse 60

$$\operatorname{Arctan} x$$

Question 61

Si u est une fonction, donner une primitive de

$$u' \times u^k \qquad (k \neq -1)$$

Réponse 61

$$\frac{u^{k+1}}{k+1}$$

Question 62

Si u est une fonction, donner une primitive de $\dfrac{u'}{u^k} \quad (k \neq 1)$

Réponse 62

$$\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}$$

Question 63

Si u est une fonction, donner une primitive de $\frac{u'}{1+u^2}$

Réponse 63

$$\mathrm{Arctan}(u)$$

Question 64

Si u est une fonction de primitive U, donner une primitive de $u(ax)$

Réponse 64

$$\frac{U(ax)}{a}$$

Question 65

Comment primitiver une fonction contenant des produits et des puissances de sinus/cosinus ?

Réponse 65

On linéarise : On remplace les sin et cos par les formules d'Euler, on développe TOUT, puis on regroupe les $e^{i\theta}$ par paire pour retrouver des sinus et cosinus par formule l'Euler. L'expression finale peut se primitiver facilement.

Question 66

Que doit-on faire en premier pour primitiver une fraction rationnelle ?

Réponse 66

On la décompose en éléments simples.

Question 67

Donner une primitive de $\frac{1}{ax+b}$

Réponse 67

$$\frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

Question 68

Donner une primitive de $\frac{1}{(ax+b)^k} \quad (k \neq 1)$

Réponse 68

$$\frac{1}{a(1-k)}\,\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$$

Question 69

Donner la formule d’intégration par partie.

Réponse 69

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 70

Si A est une matrice, comment définir l'application linéaire f associée à A ?

Réponse 70

pour X vecteur colonne, $f(X) = AX$

Question 71

Si f est une application linéaire, comment trouver la matrice A telle que $f(X) = AX$?

Réponse 71

On écrit le vecteur $f(X)$ en colonne, dans chaque ligne, on met bien les coordonnées de X dans l'ordre. Ensuite on "efface" les coordonnées de X pour ne garder que les coefficients. ça forme la matrice A.

Question 72

Soit une application linéaire f représentée par une matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). La formule avec pour écrire la matrice de f dans de nouvelles bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée)

Prec Suit

Réponse 72

On pose $Q = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et $P = P(\mathcal{C}', \mathcal{B}')$ et on a alors
$$A' = P^{-1}AQ$$

Question 73

Donner brièvement les étapes d'une résolution d'équation différentielle linéaire du premier ordre ou du second ordre.

Réponse 73

1. On détermine les solutions y_h homogène associée.
2. On "devine" la forme d'une solution particulière de (E) qu'on note y_p. On reporte y_p dans l'équation (E) afin de la déterminer complètement.
3. On additionne $y = y_h + y_p$
4. On utilise éventuellement les conditions initiales pour déterminer les constantes.

Question 74

Donner les solutions de l'équation différentielle
$$y' + a(t)y = 0.$$

Réponse 74

$y_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}$ où λ est une constante et A est une primitive de a.

Question 75

On cherche une solution particulière y_p de $y' + ay = b(t)$ où a est une constantes. Donner la forme de y_p dans les cas suivants :

1. Si $b(t)$ est un polynôme de degré n
2. Si $b(t) = Pe^{mt}$ avec P un polynôme de degré n et m une constante.

Prec *Suit*

Réponse 75

1. y_p est un polynôme inconnu de degré n.
2. $y_p = Qe^{mt}$ avec Q un pôlynome inconnue de degré n si $m \neq -a$ et de degré $n+1$ si $m = -a$.

Question 76

On cherche une solution particulière y_p de $y' + a(t)y = b(t)$ et les solutions simples ne marchent pas. Quelle est la méthode à employer ?

Réponse 76

Méthode de variation de la constante. On prend comme modèle la solution homogène $y_h = \lambda e^{-A(t)}$. On pose $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec $\lambda(t)$ une fonction à déterminer. On reporte dans l'équation différentielle, on isole λ' et on primitive pour trouver λ. On remplace dans y_p pour finir.

Question 77

Donner les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$?

Réponse 77

On pose $ar^2 + br + c = 0$ avec son discriminant Δ.

1. Si $\Delta > 0$, alors deux racines r_1 et r_2. Les solutions sont $y_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t}$
2. Si $\Delta = 0$, unique racine r_0. Les solutions sont $y_h(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$
3. Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$. Les solutions sont $y_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)\big)$

avecλ, μ des constantes.

Question 78

Donner la forme de y_p une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}$, avec P polynome de degré n et m constantes.

Réponse 78

- Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $y_p(t) = R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$
- Si m est une racine simple de l'équation caractéristique, alors $y_p(t) = t \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$
- Si m est la racine double de l'équation caractéristique , alors $y_p(t) = t^2 \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$

où R est un polynôme inconnu de degré n. On reporte y_p dans l'équation (E) pour déterminer les coefficients de R.

Question 79

L'affixe du point M de coordonnées (x, y) dans le plan est....

Réponse 79

$$z = x + iy$$

Question 80

Soit un point M du plan ayant comme affixe z. Quelle est la longueur OM ?

Réponse 80

$$|z|$$

Question 81

Soit un point M du plan ayant comme affixe z. Quelle est une mesure de l'angle entre l'axe des abscisses et $\overrightarrow{OM}$?

Réponse 81

$$arg(z)$$

Question 82

A et B deux points d'affixe respective a et b. Quel est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$?

Réponse 82

$$b - a$$

Question 83

A et B deux points d'affixe respective a et b. Que représente $|b-a|$?

Réponse 83

La longueur AB.

Question 84

A et B deux points d'affixe respective a et b. Que représente $arg(b-a)$?

Réponse 84

une mesure de l'angle $(Ox, \overrightarrow{AB})$ en radians.

Question 85

Ω un point d'affixe ω et $r > 0$. Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tels que ...

Réponse 85

$$|z - \omega| = r.$$

Question 86

A, B, C, D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d.
Si $\frac{CD}{AB} = k$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \theta$, alors....

Réponse 86

$$\frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

Prec *Suit*

Question 87

A, B, C, D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d.
Si $\frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}$, alors....

Réponse 87

$$\frac{CD}{AB} = k \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \theta$$

Question 88

On translate $M(z)$ d'un vecteur $V(v)$. On obtient le point M' d'affixe.....

Réponse 88

$$z' = z + v$$

Question 89

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors } \det A =$$

Réponse 89

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Question 90

Si A est une matrice carrée de taille plus grande que 2, quelle méthode utiliser pour calculer son déterminant ?

Réponse 90

D'abord on simplifie le déterminant avec les opérations de ligne/colonne. Puis on fait un développement en choisissant une ligne ou une colonne.

Question 91

Développer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ par rapport à la première ligne, sans calculer les déterminants de taille 2.

Réponse 91

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Question 92

Donner les opérations sur la ligne L_j qui ne changent PAS le déterminant.

Réponse 92

$L_j \leftarrow L_j + aL_i$ avec a un nombre et L_i une autre ligne.

Question 93

Donner les opérations sur la colonne C_j qui ne changent PAS le déterminant.

Réponse 93

$C_j \leftarrow C_j + aC_i$ avec a un nombre et C_i une autre colonne.

Question 94

Quel est le lien entre inversibilité de la matrice A et déterminant ?

Réponse 94

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Question 95

A quoi ressemble un développement limité d'une fonction f en 0 ?

Réponse 95

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ quand x proche de 0.

Question 96

A quoi ressemble un développement limité d'une fonction f en un point a ?

Réponse 96

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

quand x proche de a.

Question 97

Que signifie la notation $o(x^n)$?

Réponse 97

une fonction qui tend vers 0 plus vite que x^n.

Question 98

Donner la formule de Taylor-Young pour une fonction f en un point a

Réponse 98

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Question 99

développement limité en 0 à l'ordre n de $\frac{1}{1-x}$?

Réponse 99

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Question 100

développement limité en 0 à l'ordre n de e^x ?

Réponse 100

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Question 101

développement limité en 0 à l'ordre n de $\cos x$

Réponse 101

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + o(x^n)$$

Question 102

développement limité en 0 à l'ordre n de $\sin x$

Réponse 102

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + o(x^n)$$

Question 103

développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\tan x$

Réponse 103

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^3)$$

Question 104

développement limité en 0 à l'ordre n de $\ln(1-x)$

Réponse 104

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Question 105

développement limité en 0 à l'ordre 7 de $\arctan(x)$

Réponse 105

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

Question 106

développement limité en 0 à l'ordre n de $(1+x)^\alpha$

Réponse 106

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + o(x^n)$$

Question 107

Le polynome caractéristique d'une matrice A est

Réponse 107

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Question 108

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est...

Réponse 108

le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base.

Question 109

Comment trouver toutes les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice ?

Réponse 109

On cherche les racines du polynôme caractéristique, ce sont les valeurs propres.

Question 110

C'est quoi la multiplicité d'une valeur propre ?

Réponse 110

Sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Question 111

Comment faire pour diagonaliser un endomorphisme u ?

Réponse 111

On calcule le polynôme caractéristique, on cherche les racines (les valeurs propres). Pour chaque valeur propre λ, on cherche son espace propre en résolvant $u(X) = \lambda X$ et on regarde si sa dimension est égale à la multiplicité. Si tout est bon, on peut diagonaliser en créant une base avec les vecteurs propres et la matrice diagonale de l'endomorphisme dans cette base.

Question 112

Comment faire pour diagonaliser une matrice A ?

Réponse 112

On calcule le polynôme caractéristique, on cherche les racines (les valeurs propres). Pour chaque valeur propre λ, on cherche son espace propre en résolvant $AX = \lambda X$ et on regarde si sa dimension est égale à la multiplicité. Si tout est bon, on peut diagonaliser en créant une matrice de passage P avec les vecteurs propres et D un matrice diagonale avec les valeurs propres. On a alors $A = PDP^{-1}$.